



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Studentská 2, 461 17 Liberec 1

Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií

Ústav mechatroniky a technické informatiky

Disertační práce

**Nerovnoměrné rozložení proudové hustoty v třífázové
rozvodné síti**

**Nonlinear distribution of current density in three phase distribution
power net**

Ing. Martin Truhlář

Liberec 2011

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií

Nerovnoměrné rozložení proudové hustoty v třífázové rozvodné síti

Nonlinear distribution of current density in three phase distribution power net

Ing. Martin Truhlář

Studijní program: P 2612 Elektrotechnika a informatika

Studijní obor: 2612V045 Technická kybernetika

Pracoviště: Ústav mechatroniky a technické informatiky
Oddělení elektroniky a elektrotechniky
Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií
Technická univerzita v Liberci
Studentská 2, 461 17, Liberec

Školitel: Prof. Ing. Aleš Richter, CSc.

Tato práce byla vytvořena s podporou projektů: Projekt GAČR 102/08/H081 – Nestandardní aplikace fyzikálních polí – analogie, modelování, ověřování a simulace, Projektu SGS 2010/7821 – Interaktivní mechatronické systémy v technické kybernetice

Poděkování: Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu dizertační práce panu prof. Ing. Aleši Richterovi, CSc. za odborné vedení a podporu během řešení této práce a po dobu mého studia. Dále panu prof. RNDr. Ing. Miloslavu Koškovi, CSc. za odborné vedení. Nelze opomenout ani Ing. Miroslava Nováka Ph.D. jemuž děkuji za inspirace v praktických měřeních.

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou disertační práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 o právu autorském §60 (školní dílo).

Beru na vědomí, že TUL má právo na uzavření licenční smlouvy o užití mé DP a prohlašuji, že souhlasím s případným užitím mé disertační práce (prodej, zapůjčení, apod.).

Jsem si vědom toho, že užít své disertační práce či poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem TUL, která má právo ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, vynaložených univerzitou na vytvoření díla (až do jejich skutečné výše).

Disertační práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím disertační práce.

V Liberci dne 21. července 2011

Podpis

.....

Anotace

Růst produktivity výroby vyžaduje stále vyšší výkony, na které se musí dimenzovat i rozvodny velkých trojfázových proudů. Vysoké proudy však vyžadují rozměrné vodiče umístěné blízko sebe, které se navzájem ovlivňují i při nízkých frekvencích proudů. Je to především nerovnoměrné rozložení proudu ve vodiči způsobené jednak vlastním proudem (skinefekt), jednak proudy v sousedních vodičích (vířivé proudy). Teoretickým i experimentálním studiem tohoto jevu se zabývá tato práce.

V teoretické oblasti jsme odvodili přibližný vztah pro skinefekt v prakticky užívaném vodiči pravoúhlého průřezu. Nedávno byl publikován poněkud jiný vztah. Správnost tohoto vztahu porovnáváme s naším přístupem. Dále jsme vypracovali metodu pro rychlý výpočet vnějšího magnetického pole, které se jeví jako jediná možnost ověření vztahu pro proudovou hustotu ve vodiči. Tato metoda kombinuje analytický vztah a numerickou integraci. Lze ji s úspěchem použít na studium vlivu skinefektu, ale selhává při započítávání vlivu vířivých proudů. Pro tuto kompletní dynamickou úlohu jsme orientačně aplikovali metodu konečných prvků v systému COMSOL Multiphysics.

Cílem experimentu bylo především ověřit vztahy pro skinefekt. Realizovali jsme plně automatizované dynamické měření všech veličin, zejména vektorů magnetického pole, v soustavě tři masivních vodičů pravoúhlého průřezu. Prokázali jsme točivé magnetické pole v okolí vodičů. S cílem omezit vliv vířivých proudů byl ve většině experimentů v třífázové soustavě vodičů buzen pouze střední vodič. Volbou počáteční fáze v experimentálních datech pak bylo možné odděleně sledovat příspěvek od vířivých proudů a skinefektu. Rovněž bylo měřeno elektrické napětí na povrchu vodiče s cílem ověřit předpoklad konstantního povrchového proudu. Byly jsme však limitovány citlivostí a přesností měřících přístrojů. Takto se ale podařilo experimentálně prokázat nárůst odporu vodiče s rostoucí frekvencí, stejně jako nárůst fázového posuvu mezi proudem a napětím, který se v literatuře obvykle neuvádí.

Vypočtené a naměřené magnetické pole dobře souhlasily pro nízké frekvence, kdy je vliv vířivých proudů malý. Vliv skinefektu se nepodařilo jednoznačně prokázat z důvodu experimentálních chyb. Při nejvyšší frekvenci 1200 Hz teče vodičem malý proud a magnetické pole je slabé. Je to však jen technický problém a již je znám způsob, jak tento proud zvýšit. Započtením vlivu vířivých proudů správnou aplikací softwaru pro metodu konečných prvků lze dosáhnout dobrého souhlasu s experimentem u všech frekvencí ve třífázové soustavě.

Abstract

Industry productivity growth requires even more and more electrical energy. It implicates a need of adequate designed three-phase high current distribution nets. However, high currents require large dimension conductor lines located close to each other that influence themselves even at low current frequencies. High current interaction results in non-uniform distribution of current in conductor line caused by its own current (skin effect) and currents in closely located conductors (eddy currents). Present work deals with theoretical and experimental study of this phenomenon.

Theoretical part derived an approximate formula for skin effect in practical conductor of rectangular cross section. Recently, a different formula was published and we compare its correctness with the results of our study. We developed a method of fast calculation of the external magnetic field, which seems to be the only possibility to verify the formula for current density in a conductor. Our method combines analytic form and numerical integration. It can be successfully used to determine the influence of skin effect, but it fails when the effect of eddy currents is non negligible. To examine complete impact of this dynamic effect we tried to apply the finite element method in COMSOL Multiphysics system.

The aim of the experiment was primarily to verify the formulas of skin effect. We carried out a fully automated dynamic measurement of all variables, especially magnetic field vectors in a system of three large conductor of rectangular shape. We proved a rotating magnetic field around the conductors. Only middle conductor was excited in order to reduce the influence of eddy currents in most experiments in the three-phase conductor system. The contribution of eddy currents and skin effect could be monitored independently through selection of initial current phase in the experimental data. Conductor surface voltage was measured to verify the assumption of constant surface current. However, we were limited by insufficient sensitivity and accuracy of measuring devices. We have been able to experimentally demonstrate an increase in conductor resistance linked with frequency increase and also phase shift between current and voltage, which is not mentioned in related publications.

The calculated and measured magnetic field values correlated well under low frequencies, where the influence of eddy currents is small. Impact of skin effect was not clearly demonstrated due to experimental error. An experimental limitation allows us to use only low current values at high frequencies (1200 Hz) that produce low magnetic field. This is just a technical problem and already a method to increase the current is already known. By correct application of finite element method software we expect the achievement of a good agreement with experimental values at all frequencies in the three-phase system. By correct application of finite element method software and taking in account the impact of eddy currents, we achieve a good agreement with experimental values at all frequencies in the three-phase system.

Obsah

Seznam obrázků	XII
Seznam tabulek	XVII
Symboly	XIX
1 Cíle disertační práce	1
2 Úvod	3
2.1 Současný stav	3
2.2 Dnešní trendy výroby rozvodných systémů	5
2.3 Obsah a forma disertační práce	7
3 Teorie	9
3.1 Vířivé proudy a skinefekt	9
3.2 Teoretické předpoklady	11
3.3 Rovnice pro povrchový jev	13
3.3.1 Intenzita elektrického pole	13
3.3.2 Magnetická indukce	15
3.4 Povrchový jev v poloprostoru	16
3.4.1 Skinefekt v poloprostoru	16
3.4.2 Vířivé proudy v poloprostoru	19
3.5 Povrchový jev ve vrstvě	21
3.5.1 Skinefekt ve vrstvě	22
3.5.2 Vířivé proudy ve vrstvě	24
3.6 Povrchový jev v tyči obdélníkovém průřezu	25
3.7 Povrchový jev v tyči — jiný postup	31
3.8 Magnetické pole vodiče	32
3.8.1 Biot-Savartův zákon	33
3.8.2 Magnetické pole vodiče obdélníkového průřezu	34
3.8.3 Magnetické pole tří fázové soustavy	34
3.8.4 Rychlý výpočet magnetického pole masivních vodičů	35
3.9 Magnetické pole přímého vodiče s vlivem skinefektu a vířivých proudů	42
3.10 Magnetické pole trojfázové soustavy	44
3.11 Výpočet napětí na povrchu vodiče	44
4 Experiment	47
4.1 Celkové zapojení	47
4.2 Popis měřících přístrojů	48
4.2.1 Vliv frekvence na výstupní proudy	50
4.3 Měření magnetického pole ve třech fázích	52

4.4	Měření magnetického pole v jedné fázi	53
4.5	Spolehlivé měření skinefektu	53
4.6	Veličiny na povrchu vodiče	53
5	Výpočty	57
5.1	Úprava signálů	57
5.1.1	Synchronizace	57
5.1.2	Rozmazávání spektra	58
5.1.3	Redukce rušení a šumu	60
5.2	Výpočet a prezentace skinefektu	61
5.3	Výpočet magnetické indukce	64
5.3.1	Numerická integrace	64
5.3.2	Porovnání obou metod	65
5.3.3	Prezentace výsledků	67
6	Simulace	69
6.1	Skinefekt a vliv vířivých proudů	69
6.2	Výpočet magnetického pole	74
6.3	Úplná analýza trojfázové soustavy s vodiči různých profilů	76
6.4	Zhodnocení metody konečných prvků	78
7	Výsledky	79
7.1	Povrchová proudová hustota podle dvou teorií	79
7.2	Proudová hustota v tyči pravoúhlého průřezu	80
7.2.1	Průběh proudové hustoty v tyči pravoúhlého průřezu	81
7.2.2	Frekvenční závislost povrchové proudové hustoty	83
7.3	Měření napětí na povrchu vodiče	85
7.3.1	Napětí naprázdno	87
7.3.2	Napětí na smyčce a na vodiči	89
7.3.3	Vliv polohy sond	89
7.3.4	Frekvenční závislost napětí na povrchu vodiče	92
7.4	Průběh magnetického pole v okolí vodiče	94
7.4.1	Časová oblast	95
7.4.2	Vliv polohy	98
7.4.3	Vířivé proudy	101
7.4.4	Porovnání s experimentem	106
7.5	Trojfázové magnetické pole	110
8	Diskuse	115
9	Závěr	121

Seznam obrázků

2.2.1	Rozvodný systém firmy Erico	6
2.2.2	Rozvodný systém firmy Rittal	7
3.1.1	a) Vířivé proudy, b) Skinefekt	10
3.1.2	Rozložení magnetického pole u vířivých proudů.	11
3.2.1	Okrajové podmínky pro složky E , H	13
3.4.1	Jednorozměrné řešení	16
3.4.2	Tlumená elektrická vlna	18
3.4.3	Útlum reálných složek, lineární stupnice pro hloubku.	20
3.4.4	Útlum reálných složek, logaritmická stupnice pro hloubku.	20
3.5.1	Geometrie a souřadná soustava pro vrstvu	22
3.5.2	Amplituda a fáze elektrického pole ve vrstvě	23
3.5.3	Porovnání elektrického a magnetického pole pro vrstvu	24
3.5.4	Vířivé proudy ve vrstvě – Amplituda a fáze magnetické indukce	26
3.5.5	Porovnání vířivých proudů a skinefektu	26
3.6.1	Řešení pro obdélník	27
3.6.2	Průběh proudové hustoty v pravoúhlé tyči podél osy X pro různé frekvence	30
3.6.3	Průběh proudové hustoty v pravoúhlé tyči podél osy Y pro různé frekvence	30
3.7.1	Porovnání proudové hustoty podél osy Y vypočtené podle dvou přístupů .	32
3.7.2	Porovnání proudové hustoty podél osy X vypočtené podle dvou přístupů .	32
3.8.1	Biot-Savartův zákon	33
3.8.2	Vodič obdélníkového průřezu	34
3.8.3	Magnetické pole obdélníkových vodičů	35
3.8.4	Magnetické pole tenkého drátu obecného tvaru	36
3.8.5	Magnetické pole tenkého drátu konečné délky	37
3.8.6	Magnetické pole tenkého drátu — integrace podle úhlu	37
3.8.7	Magnetické pole tenkého drátu — definice integračních mezí	38
3.8.8	Složky magnetické indukce tenkého drátu	39
3.8.9	Magnetické pole masivního vodiče — průběh podél podélné osy	41
3.8.10	Magnetické pole masivního vodiče — průběh v rovině kolmé k ose vodiče .	42
3.9.1	Vliv skinefektu v jedné fázi, vodorovná složka magnetické indukce	43
3.9.2	Vliv skinefektu v jedné fázi, svislá složka magnetické indukce	43
3.10.1	Magnetické pole třífázové soustavy vodičů — průběh v rovině kolmé k ose vodiče	44
4.1.1	Aparatura pro kompletní studii experimentálního modelu rozvodny	48
4.1.2	Blokové schéma aparatury	48
4.2.1	Závislost proudů ve vodičích na frekvenci.	50
4.2.2	Experimentální a teoretická frekvenční závislost proudu u výkonového transformátoru	51
4.3.1	Poziční systém pro 3D Hallovu sondu	52

4.6.1	Sonda pro měření napětí na povrchu masivního vodiče – a) Umístění hrotů b) Odizolování hrotů od vodiče	54
4.6.2	Pohled na umístění sond a přírodních vodičů	55
5.1.1	Vyříznutí přesně definovaného úseku dat	58
5.1.2	Vybrané úseky v časové oblasti	59
5.1.3	Amplitudové spektrum pro různé délky časového průběhu	59
5.1.4	Rekonstrukce časového průběhu ze spektra	60
5.1.5	Amplitudové spektrum reálného signálu — klíčové informace	61
5.1.6	Rekonstrukce časového průběhu	62
5.1.7	Amplitudové spektrum reálného signálu v širší frekvenční oblasti	62
5.2.1	Průběh reálné složky proudové hustoty — plošný graf	63
5.2.2	Průběh reálné složky proudové hustoty — parametrický graf	63
5.3.1	Porovnání metod pro výpočet magnetické indukce pro složku X — průběh podél osy X	66
5.3.2	Porovnání metod pro výpočet magnetické indukce pro složku Y — průběh podél osy X	66
6.1.1	Reálná složka proudové hustoty ve směru svislé osy v některých řezech tyče	70
6.1.2	Reálná složka proudové hustoty ve směru vodorovné osy v některých řezech tyče	70
6.1.3	Reálná složka proudové hustoty	71
6.1.4	Vliv vířivých proudů pro vodiče v těsné blízkosti — rozložení proudové hustoty	72
6.1.5	Vliv vířivých proudů pro vodiče v těsné blízkosti — parametrické vyjádření proudové hustoty	72
6.1.6	Vliv vířivých proudů pro rozteč vodičů 40 mm — rozložení proudové hustoty	73
6.1.7	Vliv vířivých proudů pro rozteč vodičů 40 mm – parametrické vyjádření proudové hustoty	73
6.1.8	Vliv vířivých proudů pro rozteč vodičů 80 mm – parametrické vyjádření proudové hustoty	74
6.2.1	Magnetické pole obdélníkového vodiče	75
6.2.2	Magnetické pole třífázové soustavy tvořené obdélníkovými vodiči	75
6.3.1	Uspořádání vodičů třífázové soustavy	76
6.3.2	Distribuce proudové hustoty v třífázové soustavě	77
6.3.3	Distribuce proudové hustoty v třífázové soustavě – 3D prezentace	77
6.3.4	Magnetické pole třífázové soustavy	78
7.1.1	Proudová hustota na svislém povrchu vodiče	80
7.1.2	Proudová hustota na vodorovném povrchu vodiče	80
7.2.1	Proudová hustota v tyči — reálná a imaginární složka	81
7.2.2	Proudová hustota v tyči — amplituda a fáze	82
7.2.3	Proudová hustota v tyči podél výšky — reálná a imaginární složka	83
7.2.4	Proudová hustota v tyči podél výšky — amplituda a fáze	84
7.2.5	Proudová hustota v tyči podél vodorovné úsečky — reálná a imaginární složka	84
7.2.6	Proudová hustota v tyči podél vodorovné úsečky — amplituda a fáze	85
7.2.7	Proudová hustota na povrchu svislé stěny tyče — amplituda	85
7.2.8	Proudová hustota na povrchu svislé stěny tyče — fáze	86
7.3.1	Napětí mezi sondami měřená ve třech režimech	87
7.3.2	Napětí naprázdno ve frekvenční a časové oblasti pro použité frekvence	88

7.3.3	Napětí naprázdno ve frekvenční a časové oblasti pro frekvenci 135 Hz . . .	88
7.3.4	Proud, napětí ve smyčce a napětí na vodiči při frekvenci 135 Hz.	89
7.3.5	Napětí na vodiči od různých sond při frekvenci 15 Hz.	90
7.3.6	Napětí na smyčce od různých sond při frekvenci 15 Hz.	90
7.3.7	Porovnání napětí pro smyčku, vodič a skutečný úbytek od různých sond při frekvenci 15 Hz	91
7.3.8	Porovnání napětí pro smyčku, vodič a skutečný úbytek od různých sond při frekvenci 1200 Hz.	91
7.3.9	Naměřená frekvenční závislost napětí na vodiči	93
7.3.10	Naměřená frekvenční závislost fáze na smyčce	93
7.3.11	Porovnání frekvenčních závislostí amplitudy napětí na vodiči a smyčce . .	94
7.3.12	Porovnání frekvenčních závislostí fází na vodiči a smyčce.	94
7.3.13	Porovnání vypočtené a změřené frekvenční závislosti pro amplitudu	95
7.3.14	Porovnání vypočtené a změřené frekvenční závislosti pro fázový posuv . .	95
7.4.1	Časový průběh svislé složky magnetické indukce při frekvenci 45 Hz . . .	96
7.4.2	Časový průběh svislé složky magnetické indukce při frekvenci 1200 Hz . .	96
7.4.3	Časové průběhy všech tří složek magnetické indukce při frekvenci 1200 Hz	97
7.4.4	Točivé magnetické pole v jedné aktivní fázi při frekvenci 45 Hz	98
7.4.5	Točivé magnetické pole v jedné aktivní fázi při frekvenci 1200 Hz	98
7.4.6	Kontrola časového okamžiku pro nulovou fázovou konstantu budícího proudu při frekvenci 45 Hz	99
7.4.7	Vodorovná složka magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 45 Hz . .	99
7.4.8	Svislá složka magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 45 Hz	100
7.4.9	Svislá složka magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 1200 Hz . . .	100
7.4.10	Podélná (axiální) složka magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 45 Hz	101
7.4.11	Podélná (axiální) složka magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 1200 Hz	101
7.4.12	Referenční časový okamžik pro fázovou konstantu 90° při frekvenci 1200 Hz	102
7.4.13	Fázové proudy pro různé časové konstanty při frekvenci 45 Hz	103
7.4.14	Vodorovná složka magnetické indukce pro různé fázové konstanty při frek- venci 45 Hz	103
7.4.15	Svislá složka magnetické indukce pro různé fázové konstanty při frekvenci 45 Hz	104
7.4.16	Podélná (axiální) složka magnetické indukce pro různé fázové konstanty při frekvenci 45 Hz	104
7.4.17	Fázové proudy pro různé časové konstanty při frekvenci 1200 Hz	105
7.4.18	Vodorovná složka magnetické indukce pro různé fázové konstanty při frek- venci 1200 Hz	105
7.4.19	Svislá složka magnetické indukce pro různé fázové konstanty při frekvenci 1200 Hz.	106
7.4.20	Podélná (axiální) složka magnetické indukce pro různé fázové konstanty při frekvenci 1200 Hz	107
7.4.21	Možná korelace mezi budícím proudem a axiální složkou magnetické in- dukce při frekvenci 1200 Hz	107
7.4.22	Porovnání teorie a experimentu pro vodorovnou složku magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 45 Hz	108
7.4.23	Porovnání teorie a experimentu pro svislou složku magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 45 Hz	108

7.4.24	Porovnání teorie a experimentu pro vodorovnou složku magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 1200 Hz	109
7.4.25	Porovnání teorie a experimentu pro svislou složku magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 1200 Hz	109
7.5.1	Vodorovná složka magnetického pole v oblasti tří vodičů při buzení z trojfázové sítě	110
7.5.2	Svislá složka magnetické indukce v oblasti tří vodičů napájených trojfázově	111
7.5.3	Simulace časových změn magnetického pole — vodorovná složka	112
7.5.4	Simulace časových změn magnetického pole — svislá složka	112
7.5.5	Experimentální ověření točivého magnetického pole.	113

Seznam tabulek

4.6.1	Budící primární napětí	55
5.3.1	Parametry numerické integrace	65
7.3.1	Relativní odchylky pro napětí na smyčce a vodiči	92

Symbody a zkratky

Symbol	Popis	Jednotka
\vec{H}	Intenzita mag. pole	Am^{-1}
\vec{D}	Elektrická indukce	Cm^2
\vec{B}	Magnetická indukce	T
\vec{E}	Intenzita el. pole	Vm^{-1}
\vec{i}	Proudová hustota	Am^2
\vec{i}_v	Vířivé proudy	Am^2
\vec{n}	Normálový vektor	—
I	Celkový proud ve vodiči	A
U	Napětí	V
L	Délka vodiče	m
$\alpha, \beta, \alpha', \beta'$	Úhel	°
φ	Fázový posuv	°
ε	Permitivita	Fm^{-1}
ε_r	Relativní permitivita	—
ε_0	Permitivita vakua	Fm^{-1}
μ	Permeabilita	Hm^{-1}
μ_r	Relativní permeabilita	—
μ_0	Permeabilita vakua	Hm^{-1}
t	Čas	s
ω	Úhlová frekvence	rads^{-1}
$\hat{\delta}$	Komplexní útlumová konstanta	m
a	Šířka vodiče	m
b	Výška vodiče	m
V	Objem	m^3
S	Plocha	m^2
d	Hloubka vniku	m
r	Polohový polní vektor	m
r_0	Polohový materiálový vektor	m
$r_{01,02,03}$	Polohové materiálové vektory vodičů	m
$R_{1,2,3}$	Rozdíl polohových vektorů	m
γ	Vodivost	Sm^{-1}
T	Perioda	s
ρ	Hustota náboje	ΩCm^{-3}
∇	Hamiltonův operátor	$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$
Δ	Laplaceův skalární operátor	$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$

USB	Universal serial bus
LAN	Local area network
GPIB	General purpose interface bus
DA	Digitálně analogový převodník
AD	Analogově digitální převodník
ADC	Analog/digital převodník NiDaq
SM	Krokový motor
PG	Programovatelný zdroj
TPT	Výkonové transformátory
DUT	Masivní vodiče
M	Analyzátor Norma 5000
MT	Měřicí transformátory
3DHP	Tří rozměrná Hallova sonda
1DPS	Lineární posuv
MKP	Metoda konečných prvků
1D	Jedno rozměrný systém
2D	Dvourozměrný systém
3D	Třírozměrný systém
TeX	Program pro počítačovou sazbu
BS	Biot-Savartův zákon

Kapitola 1

Cíle disertační práce

Disertační práce vychází ze současného stavu poznání v oblastí povrchových jevů v elektromagnetizmu a důsledně přihlíží k technickým požadavkům praxe. Z hlediska rozvoje všeobecného poznání jde především o systematické studium povrchových jevů ve vodičích složitějšího průřezu, k němuž patří i pravoúhlý profil. Z hlediska praxe to jsou problémy, které vznikají v nízkonapěťových rozvodnách při vysokých proudových zatíženích:

- Jedním z problémů je nerovnoměrné rozložení proudu ve vodiči. Povrchový jev má za následek nadměrné zahřívání povrchu. Proto je nutné tyto sběrnice chladit.
- Dalším problémem je volba profilu vodičů. Z ekonomických důvodů se hledají optimální profily tak, aby docházelo k maximálnímu využití mědi a přitom umožnily snadnou a rychlou montáž. Bohužel se už nebere takový ohled na vedlejší jevy, které tímto přístupem vznikají.
- Málo se berou při konstrukci v úvahu přechodné jevy při zapínání a vypínání velkých výkonů, nebo při havarijním stavu. Pak mohou krátkodobě téci proudy mnohonásobně převyšující ustálený stav, na který je rozvodna navržena. Tyto proudy vyvolají silné pulsní magnetické pole, které může vést ke značným nárazovým silám mezi vodiči.

Na základě požadavků můžeme formulovat cíle disertační práce

- V oblasti teorie se jedná zejména o toto:
 - Nalézt komplexní řešení rovnic pro povrchové jevy ve velmi jednoduchých prostředích. Komplexním řešením se rozumí získat nejen průběh proudové hustoty, ale i buzeného magnetického či elektrického pole.
 - Pokusit se nalézt přibližné analytické řešení rovnic pro skinefekt ve vodiči s pravoúhlým profilem.
 - Protože veličiny, zejména proudová hustota, v předchozích dvou bodech jsou vypočteny uvnitř vodiče, nelze je měřit. Relativně snadno lze však měřit vnější magnetické pole. Proto je nutno formulovat vztahy pro jeho výpočet na základě rozložení proudové hustoty uvnitř vodiče. Pro urychlení výpočtu by tyto vztahy, nebo alespoň jejich část, měly být analytické.
- V oblasti experimentu jde zejména o ověření teoretických výsledků a získání základních poznatků o experimentálním modelu trojfázové rozvodny. Především jde o tato základní měření:
 - Zprovoznit existující aparaturu tak, aby bylo možno provádět komplexní automatizovaná měření. Komplexním měřením se rozumí měření všech významných

obvodových veličin v časové oblasti. Měření v časové oblasti vyžaduje plnou automatizaci, jak z hlediska podnětu, tak zejména z hlediska odezvy.

- Měření indukce vnějšího magnetického pole, které umožní ověřit teoretický výpočet rozložení proudové hustoty ve vodiči.
- Měření napětí na povrchu vodičů s cílem získat představu o jeho rozložení.
- Z hlediska výpočtů se práce soustředí na tyto oblasti:
 - Základní zpracování výstupních dat s cílem jejich synchronizace a získání věrohodných údajů.
 - Výpočet všech parametrů povrchového jevu popsaného přesnými nebo přibližnými analytickými vztahy.
 - Výpočet magnetického pole v okolí vodičů analyticky nebo numerickou integrací.
 - Simulace modelu použitím metody konečných prvků pro ty případy, kdy numerické integrace nelze použít.
- Z hlediska aplikace výsledků
 - Výpočtem získané výsledky z matematického modelu budou porovnávány s experimentálními výsledky.
 - Základním úkolem je nalézt takové řešení, aby povrchové jevy byly co nejvíce potlačeny.

Kapitola 2

Úvod

Současná tendence v technice je zvyšovat výkon a snižovat rozměry. To platí i pro oblast rozveden elektrické energie. Zvyšování výkonu si vynucuje rostoucí produktivita práce a používání některých nových či ekologických technologií. Snižování rozměrů jde ruku v ruce s požadavkem úspor, v našem případě drahé mědi. Obě tyto skutečnosti a některé další vedou k problémům, které je nutno studovat a na základě výsledků studia přijímat vhodná opatření.

Při řešení problémů trojfázových rozveden s vysokými proudy je nutno se především zabývat otázkou vzájemné elektromagnetické interakce vodičů. Vodiči se přenáší velký proud, mají tedy poměrně velký průřez. I při technických frekvencích se může uplatnit skin efekt. Jelikož vodiče trojfázové soustavy jsou navíc blízko sebe (s cílem úspor), lze očekávat, že se v nich indukují silné vířivé proudy. Oba jevy, ale zejména vířivé proudy, vedou k nerovnoměrnému rozložení proudu ve vodičích, proud je vytlačován k povrchu. To může způsobit přehřívání povrchových částí vodičů.

Silné proudy vyvolávají silné magnetické pole, takže mezi blízko umístěnými vodiči mohou vznikat značné vzájemné síly. Tyto síly mohou překročit únosnou mez v případě přechodných jevů. K nim dochází např. při zapínání a vypínání velkých spotřebičů nebo při haváriích. V těchto případech tečou několikanásobně vyšší proudy než v ustáleném stavu.

Respektovat skin efekt a vířivé proudy je klíčovým úkolem, jehož řešení umožní analýzu návrhu či realizace rozvodny. Tyto jevy by se měly vzít v úvahu zejména při návrhu rozvodny. Při tom jde o poměrně složité jevy v reálném systému. S ohledem na jejich důležitost, oba tyto jevy by se měly studovat teoreticky a experimentálně ověřit. V této úvodní části nastíníme, co se již udělalo ve světě, s jakými rozvodnami se setkáváme a co je třeba v jejich problematice ještě dořešit.

2.1 Současný stav

Problematika vířivých proudů v obecné poloze je elektromagnetismu známa v podstatě již od vzniku teorie elektromagnetického pole [4], [5]. V různém rozsahu se objevuje i v dnešních monografiích v češtině [1], [2]. Obdobně je tomu i v nejnovějších cizích monografiích, např. [3]. V technicky zaměřených monografiích, např. [1], je zejména skin efektu věnována přiměřená část. Podrobnější analytické řešení se pochopitelně omezuje jen na nejjednodušší případ, harmonický proud ve vrstvě, který je v technické praxi splnitelný jen velmi přibližně. Další analytické řešení je vodič kruhového průřezu, zde se však používají méně známé Besselovy funkce, i když např. v MATLABu se s nimi dá pracovat stejně jako s elementárními funkcemi.

Existují i speciální monografie zaměřené na tyto jevy. V češtině to je již starší teoretická kniha [7], která je však zaměřena spíše do oblasti mikrovln. Kniha v angličtině ze stejného

období [6] je rovněž teoretická, i když je v ní načrtnut průběh skinefektu v trojfázové rozvodné soustavě. Jelikož v té době byly numerické výpočty velmi náročné, kvantitativních informací je v ní málo.

Publikace v časopisech, zejména z posledního období, jsme vyhledávali pomocí prohlížečů odborné literatury na internetu. I když jsme se snažili použít univerzální klíčová slova ve velkém logickém rozmezí, výsledků vyhledávání bylo poměrně málo. Dále se o nich stručně zmíníme.

Informace zjištěné v novější časopisecké literatuře se obvykle týkají řešení technických problémů s vířivými proudy, případný výpočet je spojen s výpočtem integrálních vztahů nebo použitím metody konečných prvků. Lze je rozdělit do tří (nikoli disjunktních) oblastí: Kontrola rozvodny ([12], [13]), redukce vlivu vířivých proudů na oteplování vodivých objektů ([14], [16], [17] [18]) nebo naopak jejich efektivní využití v pecích [19]. Částečně se používají integrální vztahy, částečně diferenciální rovnice vedoucí k aplikaci metody konečných prvků.

Převážně experimentální práce [12] se týká trojfázové rozvodny používající plochých vodičů umístěných blízko sebe. Konečné řešení je v publikaci [13]. Jelikož se jedná o napětí řádu kV a proudy tisíců ampér, místo standardních proudových transformátorů se navrhuje použití optických transformátorů proudů. Ty v principu měří indukci magnetického pole prostřednictvím magnetooptického jevu a z její velikosti určují budící proud. Mohou být jak v objemovém, tak tenkovrstvém provedení. Hlavním problémem, který zkresluje měření, jsou vířivé proudy. Uvažuje se několik možností uspořádání magnetooptického senzoru (volný, v mezeře magnetického obvodu a pod stínícím magnetickým krytem). Provádí se pak kvalitativní rozbor, které řešení nejvíce omezí vířivé proudy. Nebudeme přecházet do podrobností, v závěru se uvádí, že optimálním řešením je dvojnásobné stínění.

Vliv vířivých proudů na oteplení pravoúhlé tyče se uvažuje v průkopnické práci [14]. Uvažuje se dopadající časově proměnné magnetické vlny na nekonečný nemagnetický vodič pravoúhlého průřezu. Výsledkem jsou integrální vztahy pro výpočet výkonových ztrát s cílem je snížit. Naopak práce [15] se zabývá indukčním ohřevem, tedy využitím vířivých proudů ve velice speciální problematice supravodivosti. Ohřevem vlivem vířivých proudů se zabývá též práce [16]. Zde se jedná o vznik vířivých proudů ve stěně nádoby transformátoru v rozvodně, pokud jsou dráty s velkým proudem vedeny blízko ní. Při řešení se opět používá integrálního přístupu.

Analytické vztahy pro ohřev hliníkové desky nekonečné plochy a konečné či nekonečné tloušťky, v jejíž blízkosti jsou vodiče přenášející silný proud, je v práci [17]. V tomto jednoduchém případě jsou odvozeny analytické vztahy pro elektromagnetické veličiny z Maxwellových rovnic a okrajových podmínek. Ze získaných složitých vztahů lze vypočítat ztráty.

Kromě integrální formulace se využívá i formulace diferenciální. Výpočtem ztrát vířivými proudy ve výkonových transformátorech se zabývá práce [18]. K výpočtu rozložení elektromagnetických veličin a ztrátového výkonu používá metodu konečných prvků. Aplikací metody konečných prvků na rozložení elektromagnetických veličin v obloukové peci se zabývá poměrně stará práce [19]. Diskuse správné aplikace metody konečných prvků a různé možnosti formulace základních parametrů úlohy pro vířivé proudy a skinefekt je smyslem práce [11].

Pokud jde o přibližné analytické řešení skinefektu ve vodiči poněkud speciálního průřezu, kterým je již pravoúhlý průřez, jsou informace v literatuře sporadické. V češtině to je především článek [8], který podrobně popisuje skinefekt a dává kvalitní podklady pro numerické řešení. Pro tuto práci však byla klíčová nedávná publikace [9], kde se vychází z řešení dvou jednorozměrných parciálních diferenciálních rovnic¹ pro dvě souřadné osy a jako řešení příslušné dvourozměrné diferenciální rovnice se použije jejich součin. O tomto přístupu, který je velmi podobný našemu řešení, se podrobněji zmíníme ještě později jak v

¹Jednorozměrná parciální diferenciální rovnice obsahuje druhou derivaci podle souřadnice a času.

teoretické části, tak v popisu experimentu a nakonec v diskusi.

Málo pozornosti bylo věnováno popisu a výpočtu magnetického pole v okolí trojfázových vodičů. Jediná práce v této oblasti [20] se zabývá speciálním případem magnetického pole tří kruhových trojfázových vodičů s kruhovým stíněním. Uvádí analytické výrazy bez výpočtů.

Z tohoto přehledu literatury, který možná není úplný, ale asi jej lze považovat za reprezentativní, vyplývá, že teoretické studium povrchových jevů v elektromagnetismu se omezuje jen na nejjednodušší případy, zpravidla uváděné v učebnicích. Ve složitějších případech, ke kterým patří již i vodič s pravoúhlým profilem, je nutno použít přibližné, obvykle numerické, řešení. V literatuře se vychází ze dvou tvarů rovnic elektromagnetického pole. Každý z nich popisuje tutéž realitu, jen v jiné formě. Ve studované literatuře byly zastoupeny přibližně stejně. Jeden z nich je integrální forma a druhý je forma diferenciální².

Obě formulace nakonec vedou k numerickému řešení. Integrální forma vede na numerickou integraci. Diferenciální forma je základem relativně nové zato velmi populární metody konečných prvků. Ještě jen připomeneme, že každá z formulací je modelem skutečné reality, který respektuje výrazné rysy studovaného systému.

2.2 Dnešní trendy výroby rozvodných systémů

Po teoretickém přehledu současného stavu se nyní zmíníme o praktické realizaci rozvodu. Kromě technických parametrů a konstrukčního řešení se soustředíme na to, jak konstruktéři při jejich realizaci respektují teoretické požadavky uvedené výše.

V dnešní době se pro sběrníkové systémy využívají dva materiály a to měď nebo hliník. Tyto vodiče mají různé vlastnosti a charakteristiky. Především měď je hojně používána. Jediným negativním faktorem je její hmotnost, na rozdíl od hliníku. Dobrá elektrická vodivost mědi dovoluje zmenšování rozměrů vodičů.

S nárůstem výkonů elektrárenských bloků narůstá i přenášený výkon rozvodu. Při řešení praktických projektů, ve kterých jsme se zabývali nelinearitami naší napájecí soustavy, nás zaujala technologie výroby rozvaděčů. Projektanti při návrhu rozvodu nízkého napětí ve většině případů využívají modulárních stavebnicových systémů.

Proud je přenášen měděnými vodiči různých tvarů. Nejčastěji se však setkáme s obdélníkovým průřezem. Vodiče jsou uchyceny v držácích z plastů, vyztužených skelnými vlákny. Rozměry měděných pásů dosahují výšky např. 100 mm až 120 mm. Tloušťka (šířka) pásu je obvykle 10 mm. Například pro proud 3260 A (při oteplení³ $\Delta T = 30$ K) musí být instalovány tři měděné obdélníkové pásy (100 x 10 mm) na každé fázi. Na oteplení má vliv vzájemná poloha vodičů v rozvaděči, podmínky pro proudění chladícího vzduchu, vlastní profil vodiče a celkové uspořádání třífázové sběrnice. Konstruktéři všechny tyto vlivy musí zohlednit při návrhu napájecích systémů a proto je pochopitelné, proč nepřikládají zvláštní význam povrchovému jevu. Na základě jednoduchých příkladů jsme si ověřili, že povrchový jev by mohl zhoršovat ztráty při přenosu elektrické energie.

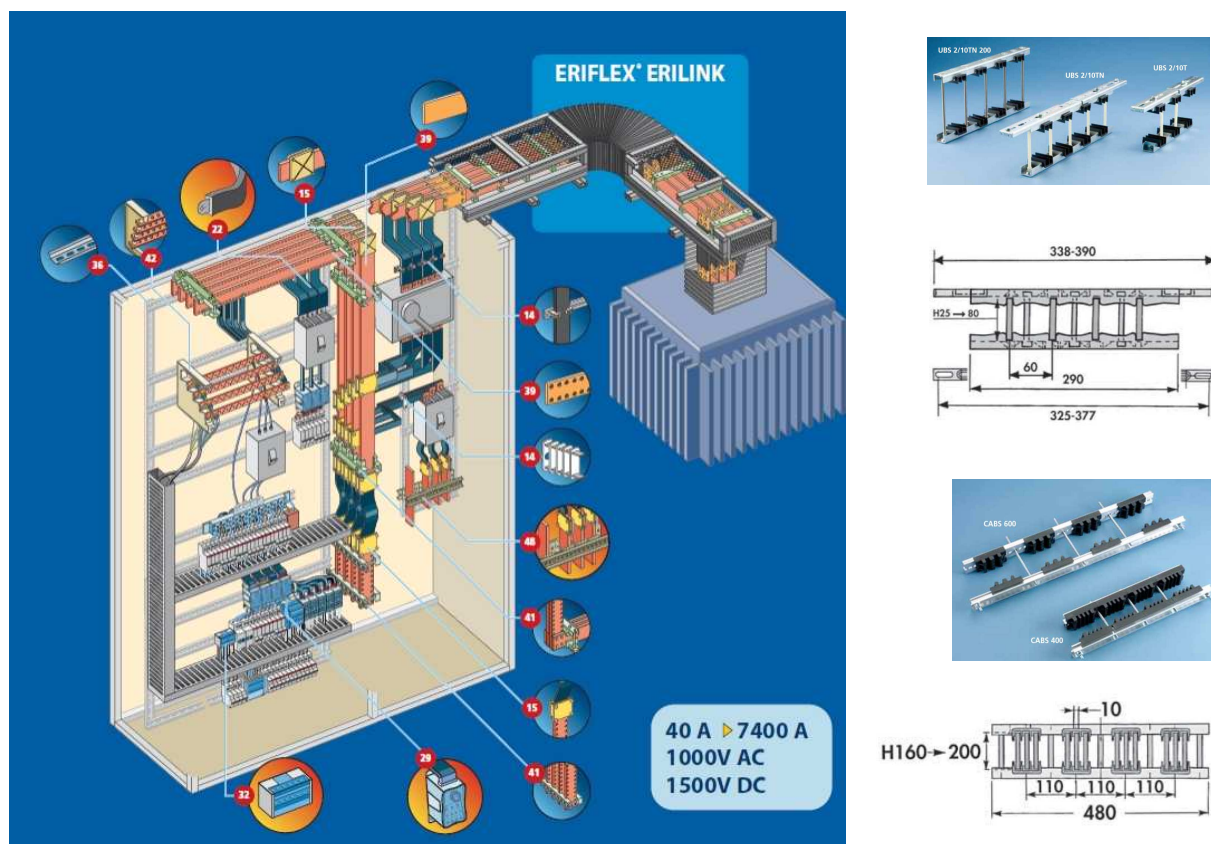
U výrobců, kteří vyrábějí vysokonapěťové rozvodné systémy, jsme si ověřili, že nezhledňují vliv vířivých proudů. Koncepti uspořádání a tvary vodičů volí tak, aby montáž byla velice rychlá. Uvedeme zde dvě firmy, které se zabývají výrobou nízkonapěťových rozvaděčů, a to firmu Rital a Erico.

Firma Erico nabízí modulární systémy do proudového zatížení 7200 A. Při takto vysokých proudech je již ohřev vodičů tak velký, že každá fáze se musí skládat ze 3 vodičů kvůli lepšímu chlazení. Rovněž se zde tímto způsobem i mírně kompenzuje vliv vířivých

²Obvykle se Maxwellovy rovnice uvádějí v diferenciální formě, která se považuje za jejich jedinou prezentaci. Integrální tvar se v učebnicích používá k odvození diferenciální formy. Ve skutečnosti jsou obě formulace ekvivalentní.

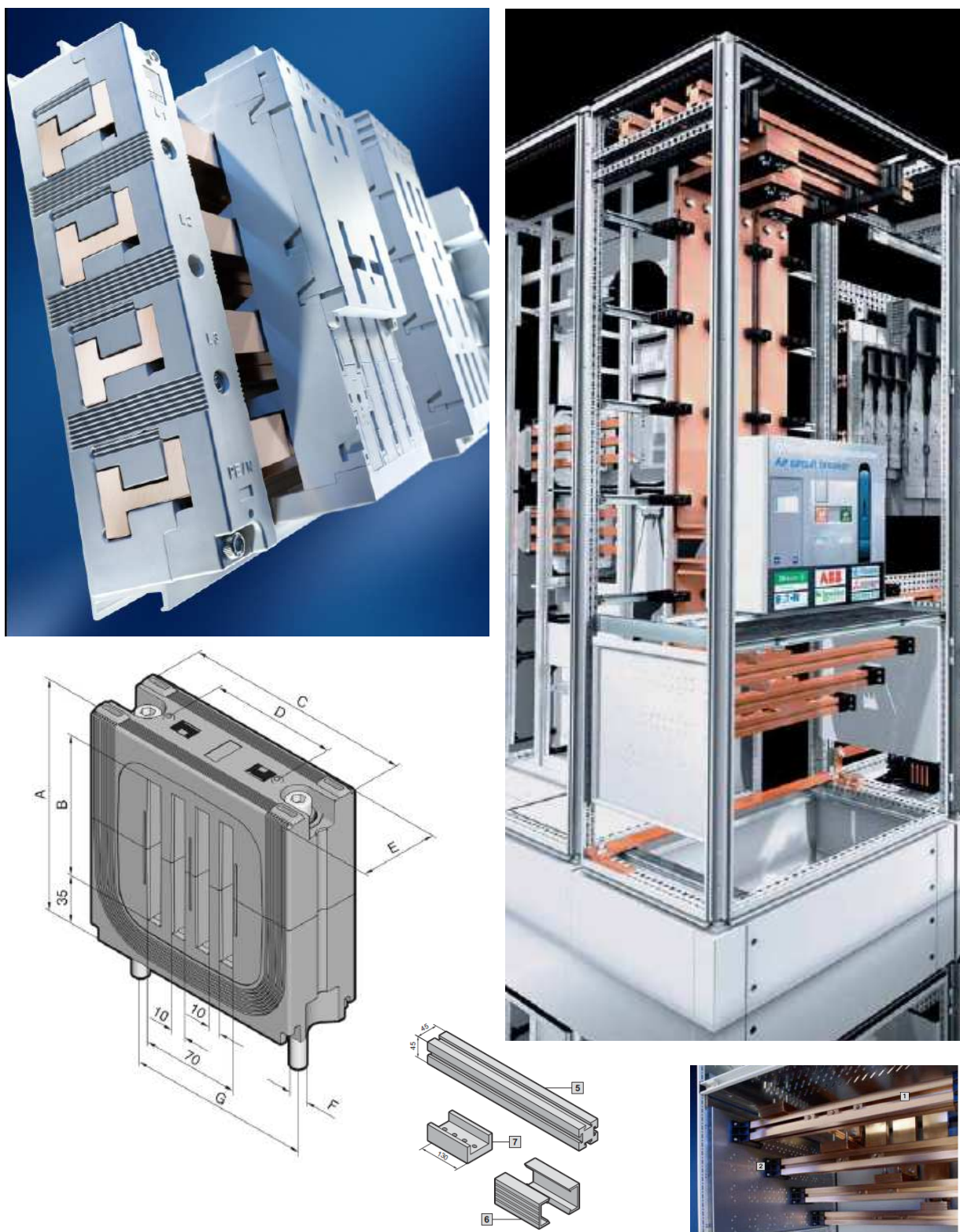
³Teplotní rozdíl uvádíme v Kelvinech, jak je tomu zvykem ve fyzice. Výraz $\Delta t = 30^\circ\text{C}$ není bez vady.

proudů. Dále firma dodává k propojování jednotlivých dílů flexibilní vodiče kvůli snadnému propojení. Pro maximální zatížení je průřez jednoho pásku 200x10 mm a vzdálenost od středů fází je 110 mm. Na následujícím obrázku 2.2.1 se můžeme podívat na řešení včetně možností uspořádání vodičů firmy Erico.



Obrázek 2.2.1: Rozvodný systém firmy Erico

Firma RITTAL nabízí sběrnice až do proudového zatížení 5500 A. Tato firma volí speciální průřezy s cílem dodržet kompaktní konstrukci a zajistit snadnou montáž rozvodu bez nutnosti dalšího mechanického opracování. Tyto speciálně volené profily neberou v úvahu vliv skinefektu a vířivých proudů. Na následujícím obrázku 2.2.2 se můžeme podívat na řešení včetně možností uspořádání vodičů firmy Rittal.



Obrázek 2.2.2: Rozvodný systém firmy Rittal

2.3 Obsah a forma disertační práce

Obsah disertační práce vychází z výše formulovaných cílů. Členění je typické pro současnou experimentální práci. Za úvodem následuje teorie, pak popis experimentu, nastínění výpočtů a simulací. Důležitou částí práce jsou významné dosažené výsledky. Dosažené výsledky jsou kriticky zhodnoceny v diskusi, celkový přínos práce je tématem pro závěr.

Nebudeme zde podrobně rozepisovat obsah kapitol, ale zmíníme se o formě práce. Práce je napsána v typografickém systému TeX z důvodu snadného psaní velkého počtu složitých matematických vztahů. Slabinou tohoto systému jsou obrázky. Tvoří plovoucí prostředí, což při větším počtu obrázků znamená, že se automaticky umisťují na další stránky. Prakticky to lze změnit jen velmi obtížně. Bohužel, to ztěžuje jejich prohlížení.

Obrázky mohou být jen ve formátu eps. Grafy při převodu z jiného formátu ztrácejí na kvalitě čar. Pokud jsou grafy vytvořeny v tomto formátu přímo v systému MATLAB, je zase jejich popis nekvalitní. Ve skutečnosti jsou tedy mnohé obrázky v lepší formě, než je ta, v níž jsou zde uváděny.

Kapitola 3

Teorie

V teoretické části popíšeme základní rovnice, z nichž se vychází při výpočtech a na nichž je založen experiment. Tyto rovnice jsou známé, jde nám však spíše o systematický popis jevů a jejich fyzikální vysvětlení. Dále uvedeme komplexní analytické řešení těchto rovnic pro jednoduché případy (poloprostor, vrstva). Pozornost budeme věnovat odvození přibližného analytického vztahu pro praktický případ pravoúhlé tyče. Se zřetelem na experimentální ověření se též soustředíme na rychlý numerický výpočet magnetického pole v okolí vodičů.

3.1 Vířivé proudy a skinefekt

Časově proměnné elektromagnetické pole při nízkých frekvencích nazýváme kvazistacionární elektromagnetické pole. Jeho základním rysem je to, že všechny body tohoto pole ve vyšetřované oblasti mají stejnou fázi, což znamená, že elektromagnetická vlna se šíří nekonečnou rychlostí (v této oblasti). Fyzikální podmínkou pro tento model je to, aby rozměry oblasti byly podstatně menší než vlnová délka elektromagnetické vlny ve vakuu. Při technických frekvencích, se kterými v této práci pracujeme, je tato podmínka bezpečně splněna.

Základem pro fyzikální analýzu dějů kvazistacionárního elektromagnetického pole je zákon elektromagnetické indukce, který má v diferenciální formě Maxwellových rovnic tvar

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.1.1)$$

kde symbolem \vec{B} je označena budící časově proměnná magnetická indukce a \vec{E} je intenzita buzeného elektrického pole jako odezva.

Obecný fyzikální význam zákona elektromagnetické indukce (3.1.1) je tento: Časově proměnné vnější magnetické pole budí (časově proměnné) elektrické pole s uzavřenými siločarami. Toto pole existuje všude, v jakémkoliv prostředí, ve vakuu, dielektriku i ve vodiči. Nazveme je vířivé elektrické pole, správněji by mělo být vírové elektrické pole.

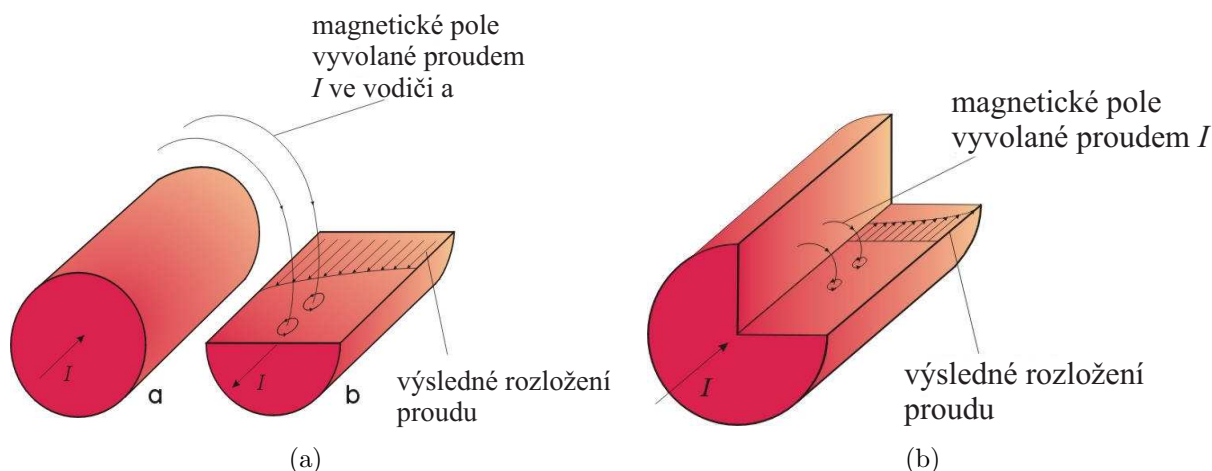
Jelikož se jedná o kvazistacionární elektromagnetické pole, elektrické pole ve vakuu a dielektriku nebudí magnetické pole. Pokud je ale prostředím vodič, vířivé elektrické pole budí vířivé proudy. Jejich orientace se např. zjistí podle Lencova pravidla, které lze formulovat takto: Indukovaná veličina má takovou orientaci, že se svými účinky snaží zabránit změně, která ji vyvolala. Lencovo pravidlo je důsledek znaménka minus v zákonu elektromagnetické indukce (3.1.1).

Indukované vířivé proudy ve vodiči budí vnitřní magnetické pole. Podle Lencova pravidla je toto pole orientováno tak, že působí proti vnějšímu poli a snaží se je snížit. Výsledné magnetické pole, vzniklé složením vnějšího budícího a vnitřního indukovaného pole, je tedy slabší než pole původní.

Vířivé proudy vznikají ve vodiči vždy, pokud je přítomno časově proměnné magnetické pole. Nyní uvažujeme složitější případ, že vodičem prochází časově proměnný proud buzený časově proměnným elektrickým polem, jehož napěťový zdroj je mimo vyšetřovanou oblast vodiče. Časově proměnný elektrický proud budí magnetické pole a toto magnetické pole vytváří podle rovnice (3.1.1) vířivé elektrické pole a tím i vířivý elektrický proud. Tento vířivý elektrický proud, jako odezva na budící proud, působí opět proti budícímu proudu a snaží se jej snížit. Tento případ nazveme skinefekt.

Principiální vysvětlení je na obr. 3.1.1, převzatým z [25]. V případě vířivých proudů (obr. 3.1.1a) je magnetické pole buzeno levým vodičem a v pravém vodiči se indukují vířivé proudy. U skinefektu (obr. 3.1.1b) teče budící proud i indukované vířivé proudy jedním vodičem.

Poznamenejme, že u výkladu vířivých proudů na obr. 3.1.1a by vzdálenost mezi vodiči měla být velká nebo by měl levý vodič mít malé rozměry. Při zde uvedeném uspořádání je skutečnost daleko složitější. V pravém vodiči vznikají skutečně jen vířivé proudy. V levém se projevuje skinefekt, který je však výrazně ovlivněn vířivými proudy buzenými pravým vodičem. Vířivé proudy z tohoto vodiče vytvářejí magnetické pole, které v sousedním levém vodiči indukuje vířivé proudy. S tímto případem se běžně setkáváme u třífázové soustavy, kde je situace ještě o poznání složitější.

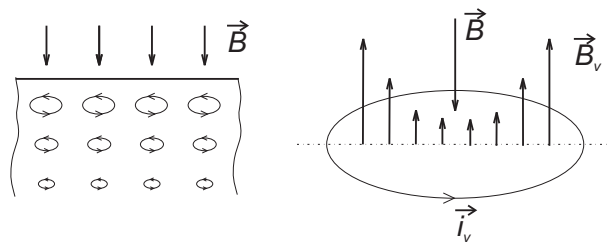


Obrázek 3.1.1: a) Vířivé proudy, b) Skinefekt

Toto rozlišování na vířivé proudy a skinefekt není zcela přesné, jelikož vždy se jedná o vířivé proudy a jejich interakce. Má však nesporný praktický význam a v této práci je chápeme jako užitečné pracovní termíny.

Prostorové rozložení elektromagnetických veličin pro případ vířivých proudů lze zjistit z této kvalitativní úvahy. Předpokládejme podle obr. 3.1.2, levá část, že magnetické pole dopadá kolmo na povrch vodiče a narůstá. Tato podmínka je důležitá. Vířivé proudy jsou pak orientovány tak, aby tomuto nárůstu zabránily, tedy magnetické pole snížily, viz obr. 3.1.2, pravá část. Výsledkem je to, že do další vrstvy pronikne slabší magnetické pole, jehož magnetická indukce je opět vířivými proudy snížena. Časově proměnné magnetické pole je tedy ve vodiči tlumeno a existuje jen v blízkosti jeho povrchu. Proto se často mluví o povrchovém jevu. Je zřejmé, že čím bude vyšší frekvence budícího magnetického pole, tím bude útlum ve vodiči větší.

Obdobnou, ale poněkud složitější úvahou lze ukázat, že v případě skinefektu rovněž proudová hustota, intenzita elektrického pole a indukce magnetického pole ubývají směrem do vnitřku vodiče. V běžné technické literatuře nebývá skinefekt popsán dostatečně přesně. Obvykle se uvádí, že při vysokých frekvencích:



Obrázek 3.1.2: Rozložení magnetického pole u vířivých proudů.

- Proud teče po povrchu vodiče.
- Proud teče v tenké povrchové vrstvě.
- Proud prudce klesá směrem do vodiče.

V odborné literatuře, např. [1], můžeme nalézt podrobnější popis včetně průběhu rozložení proudové hustoty uvnitř vodiče pro nejjednodušší případy. Tento průběh nám dává základní představu, ale nevystihuje další zajímavé jevy, které jsou spojeny s vířivými proudy a skinem. S těmito zajímavými výsledky se podrobně seznámíme v následujících částech této kapitoly.

3.2 Teoretické předpoklady

Povrchový jev vychází z Maxwellových rovnic pro kvazistacionární elektromagnetické pole ve vodiči. Všechny veličiny kvazistacionárního elektromagnetického pole mají ve vyšetřované oblasti stejnou fázi, tedy se šíří nekonečnou rychlostí. To lze přibližně splnit jen za podmínky, že rozměry této oblasti jsou značně menší než vlnová délka elektromagnetické vlny ve vakuu.

Z patnácti rovnic úplné soustavy Maxwellových rovnic zde uvedeme jen ty, které budeme pro případ vodivého prostředí potřebovat. Především to jsou základní Maxwellovy rovnice

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}, \\
 \operatorname{div} \vec{D} &= 0, \\
 \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\
 \operatorname{div} \vec{B} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

První rovnice se často nazývá Ampérův zákon (v diferenciálním tvaru), třetí pak zákon elektromagnetické indukce. Zbylé dvě zohledňují fakt, že neuvažujeme volné elektrické náboje a neexistují magnetické náboje.

Dále to jsou materiálové vztahy, které píšeme přímo pro prostředí homogenní, izotropní, měkké a lineární.

$$\begin{aligned}
 \vec{D} &= \varepsilon \vec{E}, \\
 \vec{B} &= \mu \vec{H}, \\
 \vec{j} &= \gamma \vec{E}.
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Konečně to jsou okrajové podmínky, ze čtyř uvádíme jen dvě pro tečné složky intenzit obou polí

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Rot} \vec{H} &= 0, \\
 \operatorname{Rot} \vec{E} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Symbole v základních Maxwellových rovnicích (3.2.1) mají tento význam: \vec{H} je intenzita magnetického pole, \vec{B} je jeho indukce, \vec{i} je objemová proudová hustota, \vec{E} je intenzita elektrického pole a \vec{D} jeho indukce. Podle těchto rovnic je jediným zdrojem magnetického pole proud o proudové hustotě \vec{i} . Zdroje elektrického pole, volné náboje o prostorové hustotě ρ ve vodiči nejsou, proto je na pravé straně druhé základní rovnice nula, $\text{div } \vec{D} = \rho = 0$.

Všechny materiálové (stavové) rovnice (3.2.2) předpokládají, že prostředí je homogenní, izotropní, měkké a lineární. První z nich definuje vztah mezi intenzitou \vec{E} a indukcí \vec{D} elektrického pole. Symbolem ε je označena absolutní permitivita materiálu, pro níž platí

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_o, \quad (3.2.4)$$

kde $\varepsilon_o = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{F/m}$ je permitivita vakua a ε_r je relativní permitivita materiálu. Tuto rovnici a její konstantu nebudeme potřebovat, je zde jen pro úplnost.

Druhá materiálová rovnice uvádí vztah mezi intenzitou \vec{H} a indukcí \vec{B} magnetického pole. Symbolem μ je označena absolutní permeabilita materiálu, pro níž platí

$$\mu = \mu_r \mu_o, \quad (3.2.5)$$

kde $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m}$ je permeabilita vakua a μ_r je relativní permeabilita materiálu. Za předpokladu lineárního neferomagnetického prostředí plyne s velkou přesností její hodnota $\mu_r = 1$.

Třetí materiálová rovnice je Ohmův zákon v diferenciálním tvaru, který spojuje proudovou hustotu \vec{i} jako odezvu s podnětem, intenzitou elektrického pole \vec{E} . Veličina γ je měrná elektrická vodivost materiálu a souvisí s běžnější veličinou, měrným elektrickým odporem ρ , vztahem

$$\gamma = \frac{1}{\rho}. \quad (3.2.6)$$

Okrajové podmínky (3.2.3) jsou uvedeny v symbolickém tvaru s plošnou rotací Rot. Pro plošnou divergenci je neuvádíme. V první okrajové podmínce pro magnetické pole se předpokládá, že netečou volné povrchové proudy o hustotě \vec{i} , druhá, pro elektrické pole, platí pro zde uvažovaný případ vodiče bez volných povrchových nábojů.

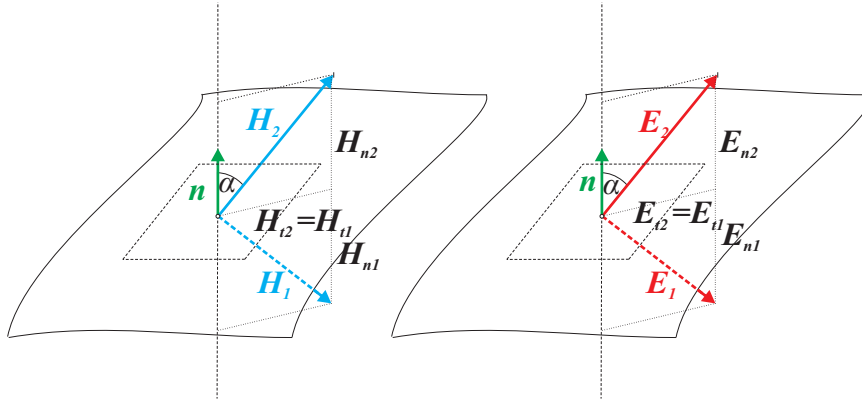
Okrajové podmínky jsou formulovány pro rozhraní dvou prostředí, na němž se materiálové parametry mění skokem. Jednu stranu rozhraní označíme symbolem 1 a druhou symbolem 2. Vektor normály \vec{n} míří ze strany 1 na stranu 2. Pokud se jedná o uzavřený objem, míří ven, jde o vektor vnější normály. Okrajové podmínky (3.2.3) pak mají následující ekvivalentní tvar a jsou vyobrazeny na obrázku 3.2.1.

$$\begin{aligned} \text{Rot } \vec{H} &= \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0, \\ \text{Rot } \vec{E} &= \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

kde \vec{H}_2 je intenzita magnetického pole na straně 2 rozhraní a \vec{H}_1 na straně 1. Totéž platí pro intenzity elektrického pole \vec{E}_2 a \vec{E}_1 . Operátorem \times se rozumí vektorový součin. Velikost vektorového součinu $\vec{n} \times \vec{H}$ je podle definice

$$|\vec{n} \times \vec{H}| = |\vec{n}| |\vec{H}| \sin \alpha = H \sin \alpha = H_t, \quad (3.2.8)$$

kde α je úhel mezi normálou \vec{n} a intenzitou \vec{H} , $H \sin \alpha$ je složka vektoru \vec{H} do směru kolmého k normále, tedy průmět do tečné roviny rozhraní v místě normály, tj. tečná složka H_t vektoru \vec{H} . Je ještě nutno dodat, že tečná složka leží kolmo k rovině tvořené vektory \vec{n} a \vec{H} . Pokud potřebujeme i její smysl, tak je dán pohybem pravotočivého šroubu při otáčení



Obrázek 3.2.1: Okrajové podmínky pro složky E, H

od \vec{n} k \vec{H} . Aplikací vztahů (3.2.8) na všechny části okrajových podmínek (3.2.7) dojdeme k těmto praktickým vztahům viz. obrázek 3.2.1.

$$\begin{aligned} H_{t1} &= H_{t2}, \\ E_{t1} &= E_{t2}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Slovní vyjádření říká, že při průchodu rozhraním se tečné složky intenzity magnetického i elektrického pole mění spojitě. U magnetického pole je ještě nutno dodat podmínku, že na rozhraní netečou volné plošné proudy. U elektrického pole nepředpokládáme volné povrchové náboje.

3.3 Rovnice pro povrchový jev

Diferenciální rovnice pro povrchový jev se odvozují z Maxwellových rovnic uvedených v předchozí části. Obdobnými úvahami lze odvodit rovnice jak pro elektrické, tak pro magnetické pole. První z nich jsou výhodnější pro řešení skinefektu, druhé pak pro kvantitativní popis vířivých proudů. Podrobně odvodíme oba typy rovnic. Při odvození předpokládáme, že prostředí je homogenní, izotropní, měkké a lineární.

3.3.1 Intenzita elektrického pole

V případě skinefektu je budící veličinou intenzita elektrického pole. Při odvozování příslušné diferenciální rovnice použijeme první a třetí ze základních Maxwellových rovnic (3.2.1). První z nich vynásobíme permeabilitou, abychom od intenzity magnetického pole přešli k jeho indukci pomocí druhé materiálové rovnice (3.2.2), tj. $\vec{B} = \mu\vec{H}$,

$$\mu \operatorname{rot} \vec{H} = \mu \vec{i} \rightarrow \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{i}. \quad (3.3.1)$$

Na třetí základní Maxwellovu rovnici aplikujeme operaci rotace

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (3.3.2)$$

Ve vektorové analýze se dokazuje identita

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}, \quad (3.3.3)$$

kde symbolem Δ je označen Laplaceův operátor. Podle druhé základní Maxwellovy rovnice v soustavě (3.2.1) je

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0. \quad (3.3.4)$$

Při odvození jsme použili prvního z materiálových vztahů (3.2.2), tj. $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$. S přihlédnutím k výsledku (3.3.4) má výraz (3.3.3) tvar

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\Delta \vec{E}. \quad (3.3.5)$$

Po dosazení do vztahu (3.3.2) a záměně pořadí parciálních derivací dostaneme

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial \operatorname{rot} \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.3.6)$$

Nyní do pravé strany této rovnice dosadíme z upravené první základní Maxwellovy rovnice (3.3.1). Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\Delta \vec{E} = \mu \frac{\partial \vec{i}}{\partial t}. \quad (3.3.7)$$

Po dosazení z Ohmova zákona v diferenciálním tvaru, poslední materiálová rovnice (3.2.2), $\vec{i} = \gamma \vec{E}$, dostáváme výslednou diferenciální rovnici pro skinefekt

$$\Delta \vec{E} - \mu \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0. \quad (3.3.8)$$

Obecně se jedná se o tři rovnice pro tři složky intenzity elektrického pole $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$. Každá složka je ještě funkcí tří souřadnic a času,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (E_x(x, y, z, t), E_y(x, y, z, t), E_z(x, y, z, t)). \quad (3.3.9)$$

Po vyřešení této rovnice můžeme okamžitě spočítat proudovou hustotu pomocí Ohmova zákona v diferenciálním tvaru $\vec{i} = \gamma \vec{E}$.

Pro výpočet magnetického pole máme několik možností:

1. Zákon elektromagnetické indukce, třetí rovnice v (3.2.1). Zde se použije přímo intenzita elektrického pole.
2. Ampérův zákon, první rovnice v (3.2.1). Zde vystupuje proudová hustota, která se nahradí intenzitou elektrického pole podle Ohmova zákona v diferenciálním tvaru $\vec{i} = \gamma \vec{E}$.
3. Biot Savartův zákon pro proudovou hustotu.

První možnost je nejjednodušší. Ze třetí rovnice v (3.2.1) máme vztah

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}. \quad (3.3.10)$$

Zjistí se rotace vypočteného elektrického pole a integrací podle času dostaneme hledanou magnetickou indukci.

Druhá možnost je složitější. Z první rovnice v (3.2.1) dostaneme vztah

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \gamma \vec{E}. \quad (3.3.11)$$

Pravá strana je dána. Z levé strany dostaneme soustavu tří rovnic pro magnetickou indukci. Její řešení nemusí být jednoduché.

Třetí možnost uvádíme jen pro úplnost. Bylo by nutno použít numerickou integraci. Navíc je při numerickém výpočtu nutno vyhnout se singularitám.

3.3.2 Magnetická indukce

V případě vířivých proudů je budící veličinou časově proměnná magnetická indukce. Je nutno získat pro ni diferenciální rovnici. Opět využijeme první a třetí z Maxwellových rovnic (3.2.1). Na první Maxwellovu rovnici aplikujeme operaci rotace

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{rot } \vec{i}. \quad (3.3.12)$$

Využijeme opět pravidlo pro vektorovou analýzu

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \Delta \vec{H}, \quad (3.3.13)$$

kde intenzitu magnetického pole nahradíme magnetickou indukcí, tj. $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

$$\text{rot rot } \vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{grad div } \vec{B} - \Delta \vec{H}. \quad (3.3.14)$$

Jelikož $\text{div } \vec{B} = 0$, viz čtvrtá základní Maxwellova rovnice v (3.2.1), získá výsledná rovnice (3.3.14) tvar

$$\text{rot rot } \vec{H} = -\Delta \vec{H}. \quad (3.3.15)$$

Dosazením rovnice (3.3.12) do rovnice (3.3.15) dostaneme rovnici

$$\Delta \vec{H} = -\text{rot } \vec{i}. \quad (3.3.16)$$

Do této rovnice dosadíme upravený diferenciální Ohmův zákon, $\vec{i} = \gamma \vec{E}$,

$$\text{rot } \vec{i} = \gamma \text{rot } \vec{E}. \quad (3.3.17)$$

Jelikož podle zákona elektromagnetické indukce (třetí z Maxwellových rovnic (3.2.1))

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.3.18)$$

dostaneme kombinací rovnic (3.3.16), (3.3.17) a (3.3.18) tento dílčí výsledek

$$-\Delta \vec{H} = -\gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.3.19)$$

Fyzikální význam má magnetická indukce. Proto jí pomocí materiálové rovnice $\vec{B} = \mu \vec{H}$ nahradíme intenzitu magnetického pole ve vztahu (3.3.19). Dostáváme tak výslednou diferenciální rovnici pro magnetickou indukci v následujícím tvaru

$$\Delta \vec{B} - \mu \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (3.3.20)$$

Jako obecný výsledek jsme získali tři diferenciální rovnice pro tři složky magnetické indukce $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$. Každá složka je funkcí tří souřadnic a času,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = (B_x(x, y, z, t), B_y(x, y, z, t), B_z(x, y, z, t)). \quad (3.3.21)$$

Úplné řešení úlohy předpokládá ještě určení proudové hustoty vířivých proudů a intenzity elektrického pole. Proudovou hustotu můžeme určit z Ampérova zákona, tj. první z maxwellových rovnic (3.2.1)

$$\vec{i} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{B}. \quad (3.3.22)$$

Pro výpočet elektrického pole máme v principu dvě možnosti

1. Ohmův zákon v diferenciálním tvaru $\vec{i} = \gamma \vec{E}$.
2. Zákon elektromagnetické indukce, třetí rovnice v (3.2.1).

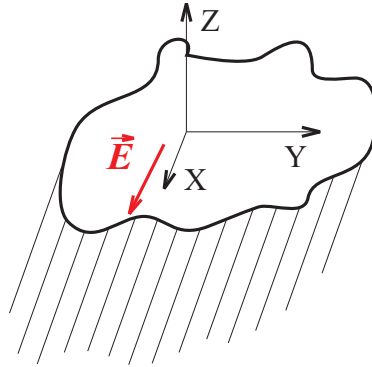
První možnost je triviální, zato třetí je náročná. Ze třetí rovnice v (3.2.1) dostaneme vztah

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.3.23)$$

Pravá strana je dána. Z levé strany dostaneme soustavu tří rovnic pro intenzitu elektrického pole. Její řešení nemusí být jednoduché.

3.4 Povrchový jev v poloprostoru

Vodivý poloprostor je nejjednodušší případ, kdy lze analyticky řešit jak skinefekt, tak vířivé proudy. Předpokládáme, že osa Z souřadné soustavy je kolmá k rovinnému rozhraní. Vakuum má souřadnice $z > 0$ a pro vodivé prostředí platí $z < 0$, viz obr. 3.4.1. Řešení provedeme jak pro skinefekt, tak pro vířivé proudy.



Obrázek 3.4.1: Jednorozměrné řešení

3.4.1 Skinefekt v poloprostoru

Na rozhraní s vakuem existuje homogenní časově proměnné elektrické pole. Zajímá nás jeho průběh ve vodivém poloprostoru. Podle obr. 3.4.1 předpokládáme, že elektrické pole má na rozhraní jedinou složku $E_x = E$, $\vec{E} = (E_x, 0, 0) = (E, 0, 0)$. Tři rovnice (3.3.8) tedy přecházejí v jednu pro x -ovou složku, tj.

$$\Delta E - \mu\gamma \frac{\partial E}{\partial t} = 0. \quad (3.4.1)$$

Tato složka je funkcí pouze souřadnice z , $\vec{E}(\vec{r}, t) = (E(0, 0, z, t), 0, 0)$, což vede k dalšímu zjednodušení

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu\gamma \frac{\partial E}{\partial t} = 0. \quad (3.4.2)$$

Nyní musíme učinit předpoklad o časovém průběhu elektrického pole. Předpokládáme harmonický ustálený stav a použijeme komplexního vyjádření, tj. pro časový průběh intenzity elektrického pole platí

$$\hat{E}(z, t) = \hat{E}(z) e^{j\omega t}, \quad (3.4.3)$$

kde j je imaginární jednotka a ω úhlová (kruhová) frekvence, pro níž platí

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \quad (3.4.4)$$

kde je f frekvence a T perioda.

Po dosazení do rovnice (3.4.2) a provedení derivace podle času dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{d\hat{E}}{dz^2} - j\omega\mu\gamma\hat{E} = 0. \quad (3.4.5)$$

Její řešení budeme hledat ve tvaru

$$\hat{E}(z) = \hat{A}e^{\hat{\delta}z} + \hat{B}e^{-\hat{\delta}z}, \quad (3.4.6)$$

kde $\hat{\delta}$ je obecně komplexní koeficient útlumu, \hat{A} a \hat{B} jsou obecně komplexní konstanty. Je nutno si uvědomit, že řešení hledáme ve vodivém poloprostoru, tj. pro $z < 0$.

Důvodem pro komplexní parametry v hledaném řešení (3.4.6) je přítomnost imaginární jednotky v rovnici (3.4.5). Můžeme se tomu vyhnout použitím reálné harmonické funkce sinus nebo kosinus ve volbě časového průběhu (3.4.3). Pak je ale hledání řešení mnohem komplikovanější a stejně tak je daleko náročnější získat z tohoto řešení další informace.

Dosadíme hledané řešení do (3.4.6) do (3.4.5). Dvojnásobná derivace exponenciální funkce vede na tutéž funkci násobenou čtvercem parametru v exponentu bez ohledu na jeho znaménko. Exponenciální funkce se vykrátí, takže nakonec dojdeme ke vztahu

$$\hat{\delta}^2 - j\omega\mu\gamma = 0. \quad (3.4.7)$$

Odtud dostaneme komplexní hodnotu útlumové konstanty

$$\hat{\delta} = (1 + j)\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}. \quad (3.4.8)$$

Odmocninu \sqrt{j} jsme spočítali při zvážení vztahu

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}. \quad (3.4.9)$$

Pak lze postupovat takto

$$\sqrt{j} = j^{\frac{1}{2}} = (e^{j\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{(1 + j)}{\sqrt{2}}. \quad (3.4.10)$$

Z řešení (3.4.6) můžeme pro vodivý poloprostor, kde souřadnice $z < 0$, použít jen první člen, tj. požadovat $\hat{B} = 0$. Druhý člen s nenulovou konstantou \hat{B} bude pro $z < 0$ s rostoucí hloubkou do prostředí růst nade všechny meze.

Pokud na povrchu vodivého poloprostoru intenzita elektrického pole nabývá hodnoty $\hat{E}(z) = E(0) = E_o$, pak má řešení (3.4.6) tvar

$$\hat{E}(z) = E_o e^{\hat{\delta}z} \quad (z < 0). \quad (3.4.11)$$

Toto komplexní řešení můžeme rozepsat na

$$\hat{E}(z) = E_o e^{\delta z} (\cos(\delta z) + j\sin(\delta z)) \quad (z < 0), \quad (3.4.12)$$

kde

$$\delta = \text{Re}(\hat{\delta}) = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}. \quad (3.4.13)$$

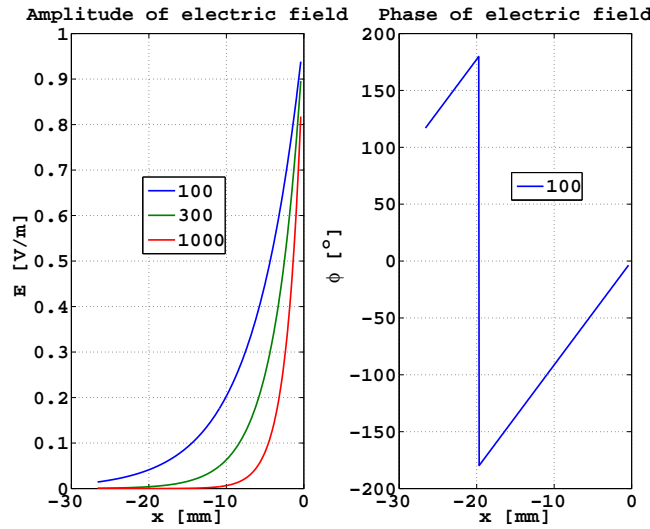
je reálná (nebo imaginární) část komplexní útlumové konstanty $\hat{\delta}$ definované vztahem (3.4.8). Je tedy nutno rolišovat mezi komplexní útlumovou konstantou $\hat{\delta}$ (se stříškou) a její reálnou hodnotou δ v (3.4.13) (bez stříšky).

Pouze reálná hodnota útlumové konstanty podle vztahu (3.4.13) má fyzikální význam. Její převrácená hodnota definuje hloubku vniku

$$d = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}. \quad (3.4.14)$$

V této hloubce klesá amplituda na $1/e \doteq 37\%$ hodnoty na povrchu. Tato definice ale platí jen pro poloprostor.

Ve vodivém poloprostoru je podle vztahu (3.4.12) tlumená elektrická vlna. Její průběh získáme z reálné nebo imaginární části tohoto vztahu a uvedeme jej později. Zde pro představu uvádíme na obr. 3.4.2 průběh její amplitudy a fáze jak je zvykem v teorii obvodů. Výpočet je pro reálné vodivé prostředí tvořené mědí a (asi nereálnou) zvolenou intenzitu elektrického pole na rozhraní. Parametrem pro amplitudu je frekvence. Elektrická vlna je exponenciálně tlumena směrem do prostředí. Čím vyšší je frekvence, tím je tlumení výraznější.



Obrázek 3.4.2: Tlumená elektrická vlna

Průběh fáze je lineární. To snadno ověříme ze vztahu (3.4.12). Fázi (v radiánech) zjistíme ze známého vztahu

$$\varphi(z) = \arctg \frac{\text{Im}\hat{E}(z)}{\text{Re}\hat{E}(z)} = \arctg \frac{\sin(\delta z)}{\cos(\delta z)} = \arctg \text{tg}(\delta z) = \delta z. \quad (3.4.15)$$

Fáze je tedy lineární funkcí souřadnice a na povrchu je nulová. Opět to platí jen pro poloprostor.

Zbývá určit proudovou hustotu a magnetickou indukci. Pomocí Ohmova zákona v diferenciálním tvaru $\vec{i} = \gamma \vec{E}$ ihned dostaneme pro proudovou hustotu vztah

$$\hat{i}(z) = \gamma E_o e^{\delta z}. \quad (3.4.16)$$

K určení magnetické indukce je nejvhodnější použít vztah (3.3.10), který má pro harmonický časový průběh tvar

$$j\omega \vec{B} = -\text{rot } \vec{E}. \quad (3.4.17)$$

Ve složkách má tato rovnice tvar

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{1}{j\omega} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = 0, \\ B_y &= -\frac{1}{j\omega} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = -\frac{1}{j\omega} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\hat{\delta}}{j\omega} E_o e^{\hat{\delta}z}, \\ B_z &= -\frac{1}{j\omega} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Nenulová je pouze složka B_y , která je popsána vztahem

$$\hat{B}_y = \hat{B}_o e^{\hat{\delta}z}, \quad (3.4.19)$$

s komplexní amplitudou

$$\hat{B}_o = -(1 - j)E_o \sqrt{\frac{\mu\gamma}{2\omega}}. \quad (3.4.20)$$

K určení magnetické indukce lze též použít vztah (3.3.11)

$$\text{rot } \vec{B} = \mu\gamma \vec{E}. \quad (3.4.21)$$

Ve složkách má tato rovnice tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu\gamma E_x = \mu\gamma E_o e^{\hat{\delta}z}, \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} &= \mu\gamma E_y = 0, \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= \mu\gamma E_z = 0. \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

V těchto rovnicích můžeme položit $B_x = B_z = 0$ a pro nenulovou složku B_y dostaneme řešení shodné s (3.4.19) a (3.4.20). Oba postupy vedou ke stejnému výsledku, což potvrzuje jejich správnost.

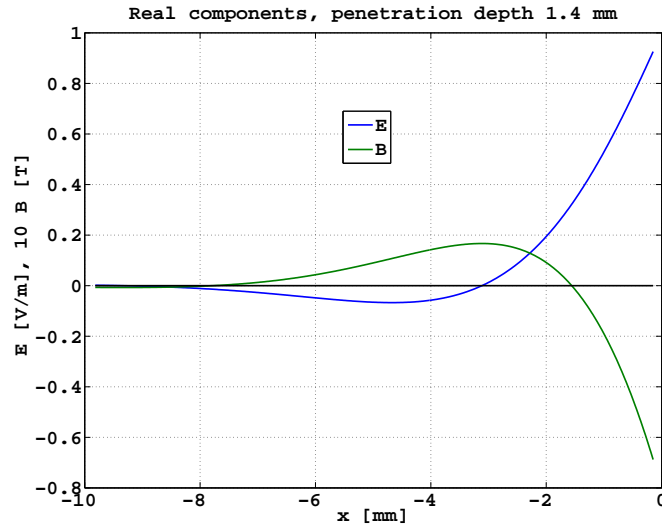
Získali jsme komplexní řešení pro všechny elektromagnetické veličiny (magnetickou indukci, intenzitu elektrického pole a proudovou hustotu). Fyzikální význam mají jejich reálné nebo imaginární složky. Zde pro ilustraci na obr. 3.4.3 porovnáme reálné složky elektrické a magnetické vlny. Magnetická složka je desetkrát zvětšena, nicméně její hodnota je vysoká. Elektrické pole na rozhraní asi nabývá nerealizovatelné hodnoty.

Na obr. 3.4.3 je podstatné, že pokles elektrického i magnetického pole směrem do prostředí je sice silně tlumený, nicméně má oscilující charakter. Ten je způsoben komplexní hodnotou útlumové konstanty (3.4.8). Pro elektrickou vlnu toto oscilující tlumení vyplývá pro reálnou či imaginární složku např. ze vztahu (3.4.12). Pro magnetickou vlnu lze získat analogický vztah (3.4.19).

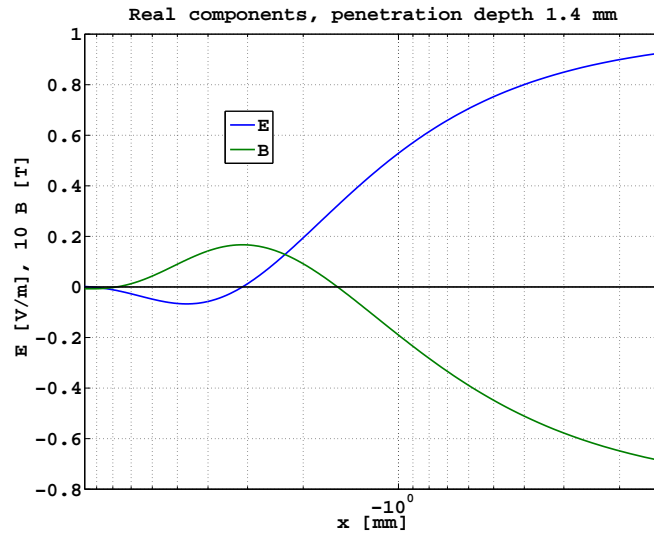
Oscilující průběh útlumu je výraznější, jestliže použijeme logaritmickou stupnici pro vodorovnou osu, podle obr. 3.4.4. S cílem využít celou plochu grafu byla mírně pozměněna počáteční hodnota hloubky směrem dovnitř.

3.4.2 Vířivé proudy v poloprostoru

Pro vířivé proudy je budící veličinou časově proměnné magnetické pole. Opět uvažujeme tentýž poloprostor jako pro skin efekt podle obr. 3.4.1. Z vakua nyní dopadá homogenní časově proměnné magnetické pole, které má směr osy Y . Zajímá nás jeho průběh ve vodorovném poloprostoru. Podle zadání má časově proměnné magnetické pole na rozhraní jedinou



Obrázek 3.4.3: Útlum reálných složek, lineární stupnice pro hloubku.



Obrázek 3.4.4: Útlum reálných složek, logaritmická stupnice pro hloubku.

složku magnetické indukce $B_y = B$, tj. $\vec{B} = (0, B_y, 0) = (0, B, 0)$. Tři rovnice (3.3.20) tedy přecházejí v jednu pro y -ovou složku, tj.

$$\Delta B - \mu\gamma \frac{\partial B}{\partial t} = 0. \quad (3.4.23)$$

Tato složka je funkcí souřadnice z , $\vec{B}(\vec{r}, t) = (0, B(0, 0, z, t), 0)$, což vede k dalšímu zjednodušení

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \mu\gamma \frac{\partial B}{\partial t} = 0. \quad (3.4.24)$$

Obdobným postupem jako pro skin efekt dojdeme k závěru, že pokud na povrchu volného poloprostoru magnetická indukce nabývá hodnoty $\hat{B}(z) = B(0) = B_o$, pak má řešení rovnice (3.4.24) tvar

$$\hat{B}(z) = B_o e^{\delta z} \quad (z < 0). \quad (3.4.25)$$

Útlumová konstanta $\hat{\delta}$ je opět dána vztahem (3.4.8).

Opět zbývá určit další dvě veličiny: proudovou hustotu \vec{i} a intenzitu elektrického pole \vec{E} . Poněvadž spolu souvisí velmi jednoduše pomocí Ohmova zákona v diferenciálním tvaru $\vec{i} = \gamma \vec{E}$, stačí určit proudovou hustotu.

Proudovou hustotu můžeme určit z Ampérova zákona, tj. z první Maxwellových rovnic (3.2.1)

$$\vec{i} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{B}, \quad (3.4.26)$$

což v rozpisu vede na tyto tři rovnice pro jednotlivé složky

$$\begin{aligned} \hat{i}_x &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{\hat{\delta}}{\mu} B_o e^{\hat{\delta}z}, \\ \hat{i}_y &= -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = 0, \\ \hat{i}_z &= -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

Jako výsledek dostáváme tuto rovnici pro x-ovou a současně jedinou složku proudové hustoty

$$\hat{i}_x = \hat{i}_o e^{\hat{\delta}z}, \quad (3.4.28)$$

kde amplituda \hat{i}_o je dána vztahem

$$\hat{i}_o = -(1+j)B_o \sqrt{\frac{\omega\gamma}{2\mu}}. \quad (3.4.29)$$

Jako druhou možnost k určení proudové hustoty uvažujme rovnici (3.3.23), která pro harmonický časový průběh a pro hledanou proudovou hustotu přejde na tvar

$$\text{rot } \vec{i} = -j \frac{\omega}{\gamma} \vec{B}. \quad (3.4.30)$$

K řešení potřebujeme složkový tvar rovnic (3.4.30)

$$\begin{aligned} \frac{\partial i_z}{\partial y} - \frac{\partial i_y}{\partial z} &= -j \frac{\omega}{\gamma} B_x = 0, \\ \frac{\partial i_x}{\partial z} - \frac{\partial i_z}{\partial x} &= -j \frac{\omega}{\gamma} B_y = -j \frac{\omega}{\gamma} B_o e^{\hat{\delta}z}, \\ \frac{\partial i_y}{\partial x} - \frac{\partial i_x}{\partial y} &= -j \frac{\omega}{\gamma} B_z = 0. \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

Nenulová složka je jenom i_x , pro kterou dostáváme opět řešení (3.4.28), avšak amplituda \hat{i}_o je dána vztahem

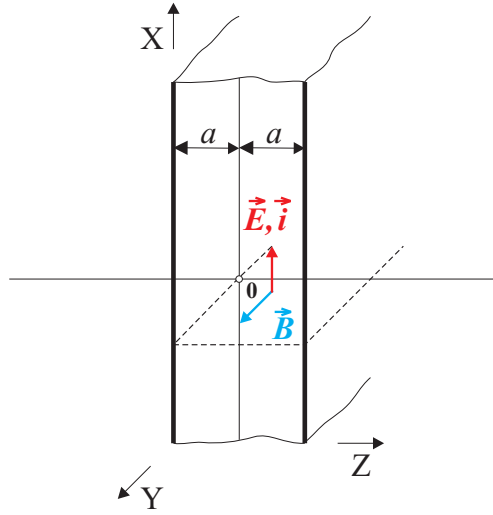
$$\hat{i}_o = (1+j)B_o \sqrt{\frac{\omega\gamma}{2\mu}}. \quad (3.4.32)$$

Druhé řešení (3.4.32) se liší znaménkem od prvního (3.4.29). Tímto rozporem se budeme zabývat v diskusi.

Ilustrativní grafy neuvádíme, poněvadž se prakticky neliší od popisu skin efektu. Ty jsme uvedli v předchozí části.

3.5 Povrchový jev ve vrstvě

Další geometrický objekt, pro který snadno zjistíme analytické řešení, je vrstva. Budeme předpokládat, že vrstva tloušťky $2a$ je kolmá k ose z a zaujímá část prostoru od $z = -a$ do $z = a$, viz. obrázek 3.5.1. Budeme hledat průběhy elektromagnetických veličin jak pro skin efekt, tak pro vířivé proudy.



Obrázek 3.5.1: Geometrie a souřadná soustava pro vrstvu

3.5.1 Skinefekt ve vrstvě

U vrstvy se souřadným systémem podle obr. 3.5.1 předpokládáme, že budící elektrické pole má směr osy X , tj. $\vec{E} = (E_x, 0, 0) = (E, 0, 0)$. S ohledem na symetrii úlohy toto pole může být pouze funkcí souřadnice z . Navíc by tato funkce měla být sudá. Na obou rovinách rozhraní bude mít tutéž hodnotu E_o . Protože vrstva vymezuje omezenou část prostoru, budeme uvažovat úplné řešení (3.4.6)

$$\hat{E}(z) = \hat{A}e^{\hat{\delta}z} + \hat{B}e^{-\hat{\delta}z}, \quad (3.5.1)$$

kde $\hat{\delta}$ je komplexní útlumová konstanta definovaná vztahem (3.4.8).

Okrajové podmínky lze s ohledem na symetrii úlohy psát ve tvaru

$$\hat{E} = E_o \quad \text{pro} \quad z = a \quad \text{a} \quad z = -a. \quad (3.5.2)$$

Po dosazení z okrajových podmínek (3.5.2) do obecného řešení (3.5.1) získáme soustavu rovnic pro koeficienty \hat{A} a \hat{B}

$$\begin{aligned} \hat{E}(a) &= \hat{A}e^{\hat{\delta}a} + \hat{B}e^{-\hat{\delta}a} = E_o, \\ \hat{E}(-a) &= \hat{A}e^{-\hat{\delta}a} + \hat{B}e^{\hat{\delta}a} = E_o. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Odečtením těchto rovnic od sebe získáme vztah

$$\hat{A}(e^{\hat{\delta}a} - e^{-\hat{\delta}a}) + \hat{B}(e^{-\hat{\delta}a} - e^{\hat{\delta}a}) = 0. \quad (3.5.4)$$

Po jednoduché úpravě

$$(e^{\hat{\delta}a} - e^{-\hat{\delta}a})(\hat{A} - \hat{B}) = 0, \quad (3.5.5)$$

zjišťujeme, že $\hat{A} = \hat{B}$.

Tuto rovnost použijeme v první z rovnic (3.5.3). Získáme rovnici

$$\hat{A}(e^{\hat{\delta}a} + e^{-\hat{\delta}a}) = 2\hat{A}\frac{(e^{\hat{\delta}a} + e^{-\hat{\delta}a})}{2} = \hat{A} \cosh(\hat{\delta}a) = E_o, \quad (3.5.6)$$

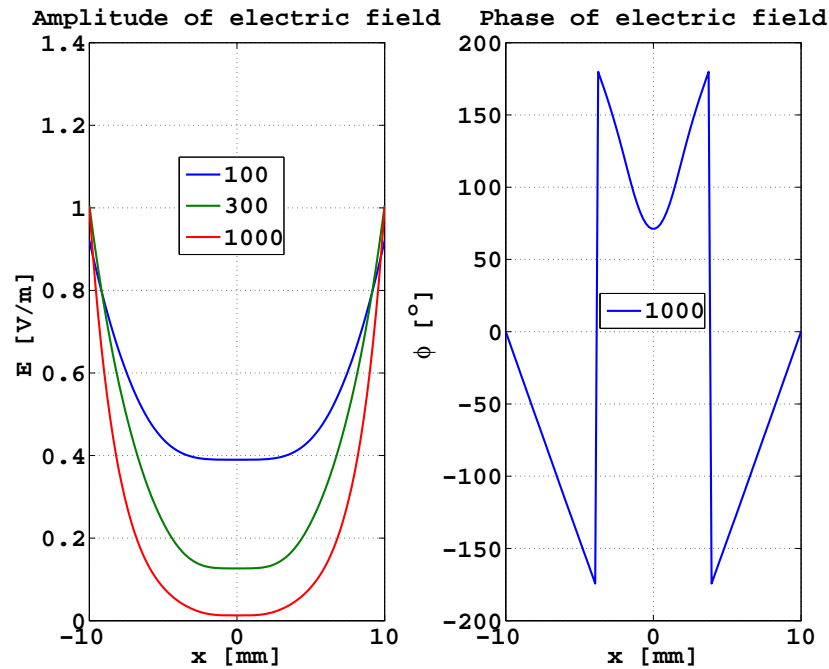
a z této rovnice dostaneme vztah pro konstanty \hat{A} a \hat{B}

$$\hat{A} = \hat{B} = \frac{E_o}{2 \cosh(\hat{\delta}a)}. \quad (3.5.7)$$

Po dosazení těchto konstant do obecného řešení (3.5.1) získáme výsledný vztah pro průběh intenzity elektrického pole ve vrstvě

$$\hat{E}(z) = \frac{E_o}{2 \cosh(\hat{\delta}a)} (e^{\hat{\delta}z} + e^{-\hat{\delta}z}) = E_o \frac{\cosh(\hat{\delta}z)}{\cosh(\hat{\delta}a)}. \quad (3.5.8)$$

Pro získání základní představy je na obr. 3.5.2 průběh amplitudy a fáze elektrického pole pro měděnou vrstvu tloušťky 20 mm pro tři typické frekvence. Toto zobrazení odpovídá přístupu z hlediska teorie obvodů. Je zřejmý prudký pokles intenzity směrem do vrstvy.



Obrázek 3.5.2: Amplituda a fáze elektrického pole ve vrstvě

Elektrické pole ve vodivém prostředí vyvolá proud. Pro proudovou hustotu dostaneme podle Ohmova zákona v diferenciálním tvaru (třetí vztah v (3.2.2)) po dosazení do výrazu (3.5.8) vztah

$$\hat{i}(z) = i_o \frac{\cosh(\hat{\delta}z)}{\cosh(\hat{\delta}a)}, \quad (3.5.9)$$

kde $i_o = \gamma E_o$ je maximální hodnota proudové hustoty na rozhraní.

Magnetické pole získáme úplně stejným postupem jako pro poloprostor, viz soustava rovnic (3.4.18), kterou zde zopakujeme

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{1}{j\omega} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = 0, \\ B_y &= -\frac{1}{j\omega} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = -\frac{1}{j\omega} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\hat{\delta}}{j\omega} E_o \frac{\sinh(\hat{\delta}z)}{\cosh(\hat{\delta}a)}, \\ B_z &= -\frac{1}{j\omega} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

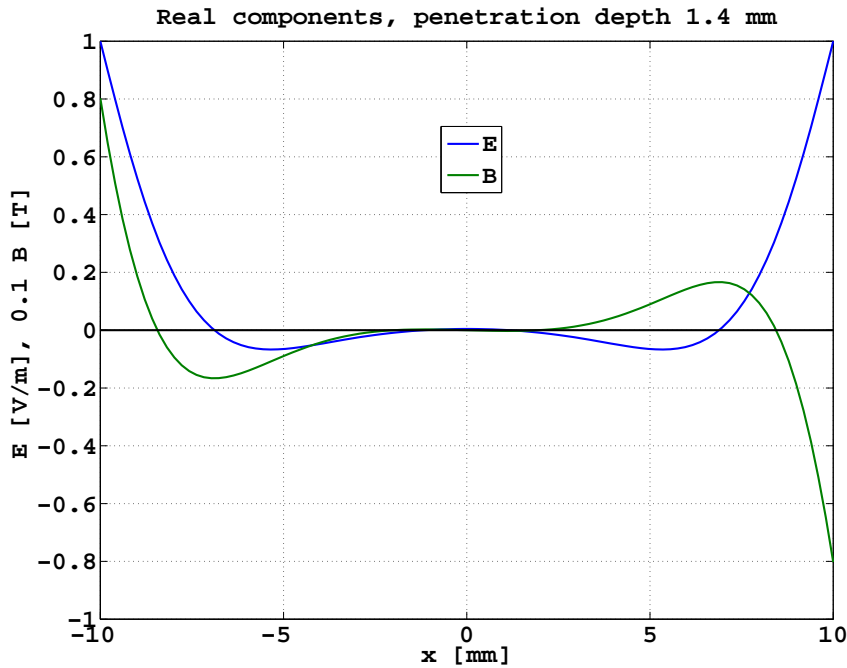
Nenulová je pouze složka B_y , která je popsána vztahem

$$\hat{B}_y = \hat{B}_o \frac{\sinh(\hat{\delta}z)}{\cosh(\hat{\delta}a)}, \quad (3.5.11)$$

s komplexní amplitudou

$$\hat{B}_o = -(1 - j)E_o \sqrt{\frac{\mu\gamma}{2\omega}}. \quad (3.5.12)$$

Porovnání reálných složek obou polí je na obr. 3.5.3. Indukce magnetického pole je ve skutečnosti desetkrát menší. I přesto nabývá vysoké hodnoty. Důvodem je, podobně jako u poloprostoru, nereálná hodnota intenzity elektrického pole. Toto zobrazení odpovídá více fyzikální představě. Elektrické pole je symetrické, magnetické antisymetrické. U elektrického pole je zajímavé a překvapivé to, že uvnitř vrstvy nabývá záporné hodnoty. Působí tedy proti vtištěnému poli. Uvnitř vrstvy tedy teče proud v opačném směru, než na okraji. Jeho hustota je ovšem malá.



Obrázek 3.5.3: Porovnání elektrického a magnetického pole pro vrstvu

3.5.2 Vířivé proudy ve vrstvě

Při vyšetřování vířivých proudů ve vrstvě vyjdeme opět z geometrie a souřadné soustavy podle obr. 3.5.1. Předpokládáme, že ve směru osy Z (zleva) dopadá na rozhraní rovinná magnetická vlna o indukci B_o . Zajímá nás průběh magnetické indukce ve vrstvě.

Ve vrstvě se magnetické pole tlumí v důsledku vířivých proudů a na druhém rozhraní se částečně odrazí a částečně projde. Ve vrstvě jsou tedy obě vlny, šířící se jak v kladném, tak záporném, směru osy Z . Předpokládejme, že dopadající rovinná vlna má magnetickou indukci ve směru osy Y , tj. ve vrstvě je indukce $\vec{B} = (0, B_y, 0) = (0, B, 0)$. S ohledem na symetrii úlohy toto pole může být pouze funkcí souřadnice z . Obecné řešení by mělo mít tvar

$$\hat{B}(z) = \hat{C} e^{\hat{\delta}z} + \hat{D} e^{-\hat{\delta}z}, \quad (3.5.13)$$

kde $\hat{\delta}$ je komplexní útlumová konstanta definovaná vztahem (3.4.8).

Při dopadu na vrstvu má magnetická indukce hodnotu B_o . Po průchodu vrstvou poklesne magnetická indukce na hodnotu $B_o e^{-2\hat{\delta}a}$. Přibližné okrajové podmínky lze tedy psát ve tvaru

$$\hat{B} = B_o \quad \text{pro } z = -a, \quad \hat{B} = B_o e^{-2\delta a} \quad \text{pro } z = a. \quad (3.5.14)$$

Po dosazení z okrajových podmínek (3.5.14) do obecného řešení (3.5.13) získáme soustavu rovnic pro koeficienty \hat{C} a \hat{D}

$$\begin{aligned} \hat{B}(a) &= \hat{C} e^{\delta a} + \hat{D} e^{-\delta a} = B_o e^{-2\delta a}, \\ \hat{B}(-a) &= \hat{C} e^{-\delta a} + \hat{D} e^{\delta a} = B_o. \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

Tato soustava rovnic má řešení

$$\begin{aligned} \hat{C} &= 0, \\ \hat{D} &= B_o \frac{e^{-3\delta a} - e^{\delta a}}{e^{-2\delta a} - e^{2\delta a}}. \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

Průběh magnetické indukce ve vrstvě získáme po dosazení z (3.5.16) do (3.5.13)

$$\hat{B}(z) = \hat{D} e^{-\delta z}. \quad (3.5.17)$$

Je tedy obdobné jako pro poloprostor, což nepřekvapuje.

Při výpočtu intenzity elektrického pole můžeme postupovat obdobně jako u poloprostoru. Soustavu rovnic (3.4.31) napíšeme pro intenzitu elektrického pole

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -j\omega B_x = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega B_y = -j\omega \hat{D} e^{-\delta z}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega B_z = 0. \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Nenulová složka je jenom E_x , pro kterou dostáváme řešení

$$\hat{E}(z) = \hat{E}_o e^{-\delta z}, \quad (3.5.19)$$

avšak amplituda \hat{E}_o je dána vztahem

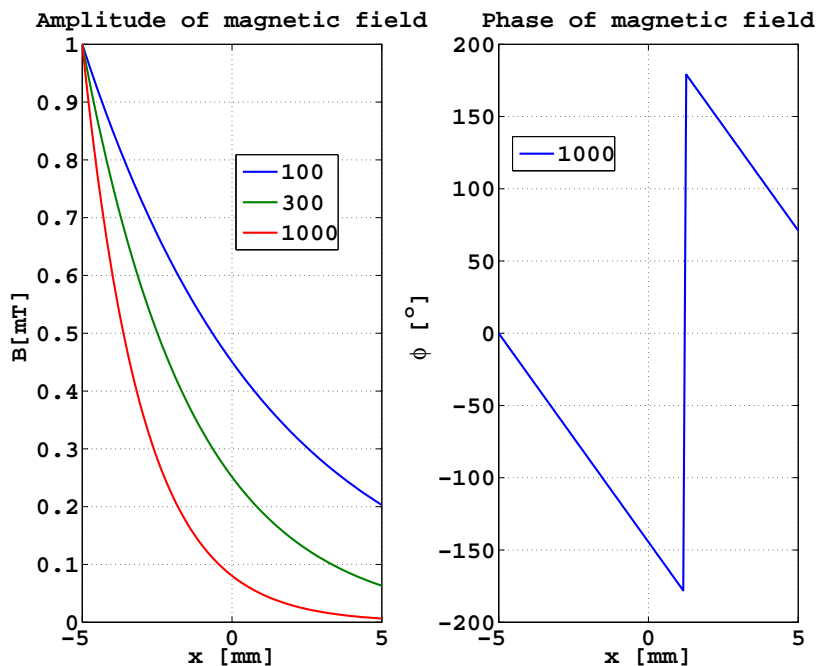
$$\hat{E}_o = (1 + j)\hat{D}\sqrt{\frac{\omega}{2\mu\gamma}}. \quad (3.5.20)$$

Pro ilustraci uvádíme několik obrázků. Na obr. 3.5.4 je průběh amplitudy a fáze magnetického pole s typickými frekvencemi dopadajícího na měděnou vrstvu tloušťky 10 mm. Je zřejmý prudký pokles indukce směrem do vrstvy. Vrstva je natolik široká, že pole při frekvenci 1 kHz je v ní prakticky utlumené. Fáze se mění lineárně.

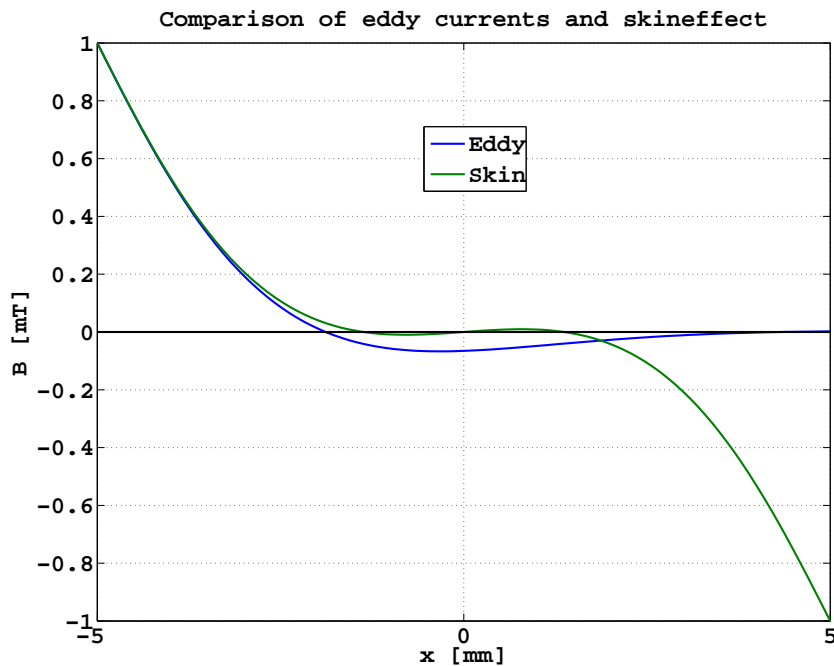
Rozdíl mezi skinefekt a vířivými proudy vyplývá z obr. 3.5.5. Magnetické pole vířivých proudů je nesymetrické. Je soustředěno v blízkosti stěny, na níž magnetická vlna dopadá. Magnetické pole pro skinefekt je antisymetrické, je soustředěno v blízkosti obou stěn.

3.6 Povrchový jev v tyči obdélníkovém průřezu

Předpokládáme, že obdélníkový vodič má šířku $2a$ ve směru osy X a výšku $2b$ ve směru osy Y , čili průřez vodiče je umístěn v rovině XY . Proud protéká ve směru osy Z , viz obr. 3.6.1. Řešení je složitější než v případě vrstvy. Vystupují zde 4 okrajové podmínky, které nám



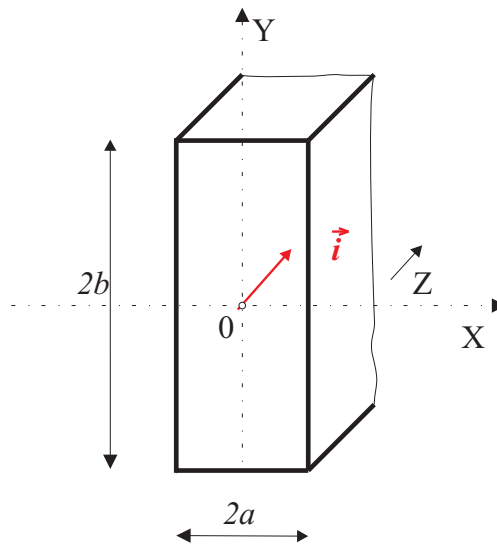
Obrázek 3.5.4: Vířivé proudy ve vrstvě – Amplituda a fáze magnetické indukce



Obrázek 3.5.5: Porovnání vířivých proudů a skinefektu

řešení podstatně komplikují. Tyto okrajové podmínky lze obtížně analyticky formulovat pro vířivé proudy, proto se v této části omezíme, na rozdíl od předchozích, jen na skinefekt.

Vychází se z obecného řešení pro jednu dimenzi jak ve směru osy X , tak ve směru osy



Obrázek 3.6.1: Řešení pro obdélník

Y. Tato řešení mají po řadě úprav tvar¹

$$\begin{aligned} i_x(x) &= E e^{\delta x} + F e^{-\delta x}, \\ i_y(y) &= G e^{\delta y} + H e^{-\delta y}. \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

Tato řešení vyhovují 2D rovnici, nejsou však nejobecnější. Tím je jejich součin

$$i_{xy}(x, y) = i_x(x)i_y(y) = (a e^{\delta x} + b e^{-\delta x})(c e^{\delta y} + d e^{-\delta y}), \quad (3.6.2)$$

jak lze snadno dokázat dosazením. Ve vztahu (3.6.2) se používají jiné konstanty, než v (3.6.1), jelikož jde o další částečné obecné řešení. Po roznásobení má součin (3.6.2) tvar

$$i_{xy}(x, y) = i_x(x)i_y(y) = A e^{\delta(x+y)} + B e^{\delta(x-y)} + C e^{-\delta(x-y)} + D e^{-\delta(x+y)}. \quad (3.6.3)$$

Nové konstanty A, B, C, D jsou určeny starými konstantami a, b, c, d , převodní vztahy však nejsou v tomto případě důležité. Úplné obecné řešení získáme součtem řešení (3.6.3) (případně (3.6.2)) a (3.6.1)

$$\begin{aligned} i(x, y) &= A e^{\delta(x+y)} + B e^{\delta(x-y)} + C e^{-\delta(x-y)} + D e^{-\delta(x+y)} \\ &\quad + E e^{\delta x} + F e^{-\delta x} + G e^{\delta y} + H e^{-\delta y}. \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Konstanty je nutno určit z okrajových podmínek, tj. intenzity elektrického pole na povrchu tyče. Volba okrajových podmínek je klíčovou částí úlohy. Volíme ten nejjednodušší případ, že tato intenzita je konstantní na celém povrchu. Důvody pro tuto volbu probíráme v diskusi. Okrajové podmínky tedy mají tvar

$$\begin{aligned} i(x, y) &= i_o && \text{pro } x = a, \quad y \in (-b, b), \\ i(x, y) &= i_o && \text{pro } x = -a, \quad y \in (-b, b), \\ i(x, y) &= i_o && \text{pro } y = b, \quad x \in (-a, a), \\ i(x, y) &= i_o && \text{pro } y = -b, \quad x \in (-a, a). \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

Konstanty v obecném řešení (3.6.4) jsou jednoznačně určeny okrajovými podmínkami (3.6.5). Řešení však obsahuje 8 konstant a okrajové podmínky jsou jen čtyři. Mezi konstantami musí tedy existovat i další vztahy než ty, které plynou přímo z okrajových podmínek.

¹V následujících vztazích indexy neuvádějí složku proudové hustoty, ale zvýrazňují její souřadnici.

Jeden z postupů, jak tyto další vztahy získat je tento. Po dosazení obecného řešení (3.6.4) do prvních dvou okrajových podmínek (3.6.5) a jednoduchých úpravách získáme vztahy

$$\begin{aligned} i_o &= A e^{\hat{\delta}a} e^{\hat{\delta}y} + B e^{\hat{\delta}a} e^{-\hat{\delta}y} + C e^{-\hat{\delta}a} e^{\hat{\delta}y} + D e^{-\hat{\delta}a} e^{-\hat{\delta}y} \\ &\quad + E e^{\hat{\delta}a} + F e^{-\hat{\delta}a} + G e^{\hat{\delta}y} + H e^{-\hat{\delta}y}, \\ i_o &= A e^{-\hat{\delta}a} e^{\hat{\delta}y} + B e^{-\hat{\delta}a} e^{-\hat{\delta}y} + C e^{\hat{\delta}a} e^{\hat{\delta}y} + D e^{\hat{\delta}a} e^{-\hat{\delta}y} \\ &\quad + E e^{-\hat{\delta}a} + F e^{\hat{\delta}a} + G e^{\hat{\delta}y} + H e^{-\hat{\delta}y}. \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

Tyto rovnice odečteme

$$\begin{aligned} &A e^{\hat{\delta}a} e^{\hat{\delta}y} + B e^{\hat{\delta}a} e^{-\hat{\delta}y} + C e^{-\hat{\delta}a} e^{\hat{\delta}y} + D e^{-\hat{\delta}a} e^{-\hat{\delta}y} \\ &\quad + E e^{\hat{\delta}a} + F e^{-\hat{\delta}a} + G e^{\hat{\delta}y} + H e^{-\hat{\delta}y} \\ &- A e^{-\hat{\delta}a} e^{\hat{\delta}y} - B e^{-\hat{\delta}a} e^{-\hat{\delta}y} - C e^{\hat{\delta}a} e^{\hat{\delta}y} - D e^{\hat{\delta}a} e^{-\hat{\delta}y} \\ &\quad - E e^{-\hat{\delta}a} - F e^{\hat{\delta}a} - G e^{\hat{\delta}y} - H e^{-\hat{\delta}y} = 0. \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

a uspořádáme tak, aby zde byl součet členů tvořených konstantou a exponenciální funkcí proměnné y

$$\begin{aligned} &(A - C) e^{\hat{\delta}a} e^{\hat{\delta}y} + (B - D) e^{-\hat{\delta}a} e^{\hat{\delta}y} + (C - A) e^{-\hat{\delta}a} e^{\hat{\delta}y} + (D - B) e^{-\hat{\delta}a} e^{-\hat{\delta}y} \\ &\quad + (E - F) e^{\hat{\delta}a} + (F - E) e^{-\hat{\delta}a} = 0. \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Součet těchto členů bude nulový jen za podmínky, že rozdíly koeficientů $A - C$, $B - D$ atd. budou nulové. To vede na tyto podmínky mezi koeficienty v obecném řešení (3.6.4)

$$A = C, \quad B = D, \quad E = F, \quad (3.6.9)$$

Aplikujeme-li předchozí postup do dalších dvou okrajových podmínek (3.6.5), získáme vztahy

$$A = C, \quad B = D, \quad G = H. \quad (3.6.10)$$

Nová je jen poslední rovnost. Předchozí dvě potvrzují správné odvození. S použitím vztahů (3.6.9) a (3.6.10) v obecném řešení (3.6.4) dostaneme pro toto řešení přehlednější tvar

$$i(x, y) = 2A \cosh(\hat{\delta}x) e^{\hat{\delta}y} + 2B \cosh(\hat{\delta}x) e^{-\hat{\delta}y} + 2E \cosh(\hat{\delta}x) + 2G \cosh(\hat{\delta}y). \quad (3.6.11)$$

Přidejme ještě podmínku

$$A = B, \quad (3.6.12)$$

pak má obecně řešení ještě kompaktnější tvar

$$i(x, y) = 4A \cosh(\hat{\delta}x) \cosh(\hat{\delta}y) + 2E \cosh(\hat{\delta}x) + 2G \cosh(\hat{\delta}y). \quad (3.6.13)$$

Podmínku (3.6.12) lze použít, poněvadž neovlivní výsledek aplikace okrajových podmínek. Naopak jej učiní snadnějším. Na toto řešení nyní aplikujeme první a třetí okrajovou podmínku. Aplikace druhé a čtvrté vede k témuž výsledku. Dostaneme

$$\begin{aligned} i_o &= 4A \cosh(\hat{\delta}a) \cosh(\hat{\delta}y) + 2E \cosh(\hat{\delta}a) + 2G \cosh(\hat{\delta}y), \\ i_o &= 4A \cosh(\hat{\delta}x) \cosh(\hat{\delta}b) + 2E \cosh(\hat{\delta}x) + 2G \cosh(\hat{\delta}b). \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

Po úpravě

$$\begin{aligned} i_o &= (4A \cosh(\hat{\delta}a) + 2G) \cosh(\hat{\delta}y) + 2E \cosh(\hat{\delta}a), \\ i_o &= (4A \cosh(\hat{\delta}b) + 2E) \cosh(\hat{\delta}x) + 2G \cosh(\hat{\delta}b). \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

Levá strana (3.6.15) je konstantní. Aby byla pravá strana konstantní, musí platit

$$\begin{aligned} 2A \cosh(\hat{\delta}a) + G &= 0, \\ 2A \cosh(\hat{\delta}b) + E &= 0. \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

Za těchto podmínek zjistíme z (3.6.15) hodnoty konstant E a G

$$\begin{aligned} E &= \frac{i_o}{2 \cosh(\hat{\delta}a)}, \\ G &= \frac{i_o}{2 \cosh(\hat{\delta}b)}. \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

Z rovnic (3.6.16) pak zjistíme konstantu A

$$A = -\frac{i_o}{4 \cosh(\hat{\delta}a) \cosh(\hat{\delta}b)} \quad (3.6.18)$$

Po dosazení konstant A z (3.6.18), E a G z (3.6.17) do kompaktního obecného řešení (3.6.13) dostaneme výsledek

$$i(x, y) = -i_o \frac{\cosh(\hat{\delta}x) \cosh(\hat{\delta}y)}{\cosh(\hat{\delta}a) \cosh(\hat{\delta}b)} + i_o \frac{\cosh(\hat{\delta}x)}{\cosh(\hat{\delta}a)} + i_o \frac{\cosh(\hat{\delta}y)}{\cosh(\hat{\delta}b)}. \quad (3.6.19)$$

Dosazením $x = a$ nebo $y = b$ do výsledného řešení (3.6.19) se přesvědčíme, že okrajové podmínky (3.6.5) jsou splněny.

Celkový proud tyčí \hat{I} spočítáme integrací proudové hustoty (3.6.19) přes průřez tyče

$$\hat{I} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b i(x, y) dx dy = i_o \frac{2}{\hat{\delta}^2} [-2 \operatorname{tgh}(\delta a) \operatorname{tgh}(\delta b) + \delta \operatorname{tgh}(\delta a) + \delta \operatorname{tgh}(\delta b)]. \quad (3.6.20)$$

Naopak, jeli zadán celkový proud v tyči, což je praktický případ, proudovou hustotu (3.6.19) vypočítáme podle vztahu

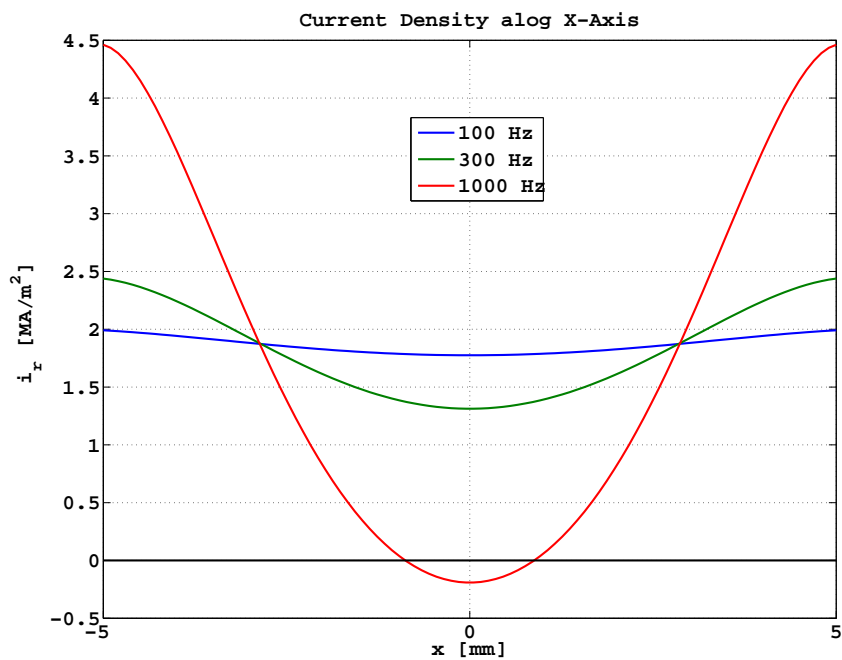
$$\hat{i}_o = I \frac{\hat{\delta}^2}{2 [-2 \operatorname{tgh}(\delta a) \operatorname{tgh}(\delta b) + \delta \operatorname{tgh}(\delta a) + \delta \operatorname{tgh}(\delta b)]}. \quad (3.6.21)$$

Ve vztazích se na první pohled může zdát neshoda v tom, že někdy je proudová hustota reálná, vztah (3.6.20), jindy komplexní, vztah (3.6.21). Pro celkový proud je tomu naopak. Ve skutečnosti je vše v pořádku, zadávanou veličinu (nezávisle proměnnou) volíme reálnou, vypočtená veličina je pak komplexní.

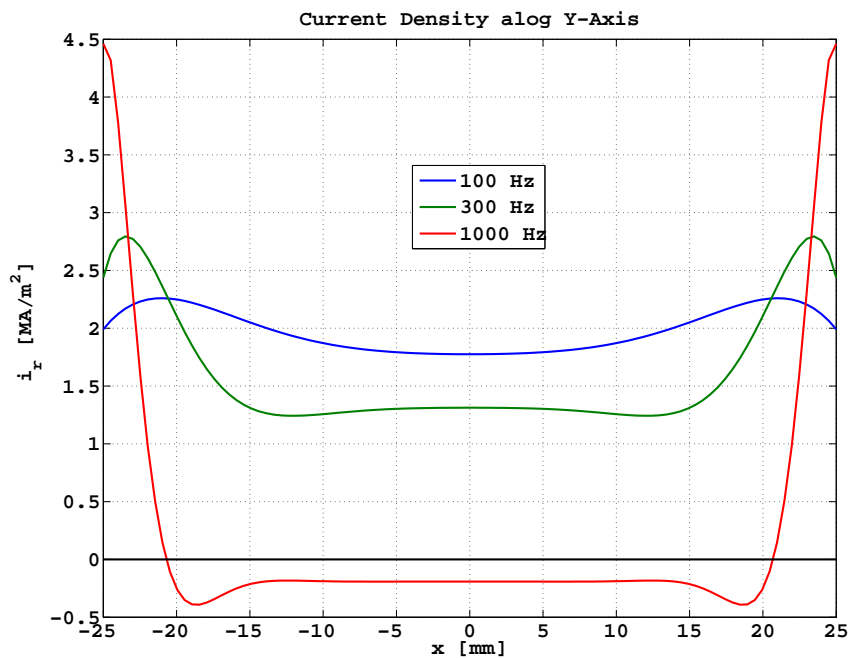
Pro ilustraci uvádíme základní výsledky. Předpokládáme měděnou tyč šířky 10 mm ve směru osy X a výšky 50 mm ve směru osy Y , kterou protéká celkový proud 1000 A. Frekvence je nyní parametrem. Průběh proudové hustoty podél základních os je na následujících obrázcích. Na obr. 3.6.2 je průběh proudové hustoty podél osy X . Pro nízké frekvence je rozložení proudové hustoty téměř rovnoměrné, pro vysoké je proud vytlačován směrem k okrajům, kde dosahuje maxima. Neočekávaným výsledkem je to, že při nejvyšší frekvenci teče uprostřed tyče proud opačným směrem.

Na obr. 3.6.3 je průběh proudové hustoty podél osy Y . Poněvadž je nyní rozměr pětikrát větší než předchozí, povrchový jev je výraznější. S rostoucí frekvencí je proud stále více vytlačován k okrajům. Maxima však nedosahuje na okrajích tyče, ale v jejich blízkosti. Rovněž tak uprostřed vodiče nemusí být nutně minimum proudové hustoty. Nejpodstatnější a zároveň nejméně očekávaný je ale výsledek, že při vysoké frekvenci teče proud v dosti široké oblasti kolem osy vodiče opačným směrem. Tento proud je ale poměrně slabý.

Již tyto základní obrázky ukazují, že průběh proudové hustoty v tyči je dosti komplikovaný a nemusí plně odpovídat zžitým představám, které jsme uvedli na počátku této kapitoly.



Obrázek 3.6.2: Průběh proudové hustoty v pravoúhlé tyči podél osy X pro různé frekvence



Obrázek 3.6.3: Průběh proudové hustoty v pravoúhlé tyči podél osy Y pro různé frekvence

3.7 Povrchový jev v tyči — jiný postup

V literatuře [9] je v principu povrchový jev počítán podle analogických výchozích rovnic, avšak výsledné vztahy mají tvar

$$\hat{i}(x, y) = I \frac{\hat{\delta}_x \hat{\delta}_y}{4} \frac{\cosh(\hat{\delta}_x x) \cosh(\hat{\delta}_y y)}{\sinh(\hat{\delta}_x a) \sinh(\hat{\delta}_y b)}, \quad (3.7.1)$$

kde I je celkový proud tekoucí tyčí. Útlumové konstanty $\hat{\delta}_x$ a $\hat{\delta}_y$ musí splňovat podmínku

$$\hat{\delta}_x^2 + \hat{\delta}_y^2 = j\omega\mu\gamma. \quad (3.7.2)$$

Porovnáme tento výsledek s naším řešením (3.6.19), ve kterém ponecháme pouze součin hyperbolických funkcí

$$\hat{i}_r(x, y) = -i_o \frac{\cosh(\hat{\delta}x) \cosh(\hat{\delta}y)}{\cosh(\hat{\delta}a) \cosh(\hat{\delta}b)}. \quad (3.7.3)$$

Pro toto řešení přejde proudová hustota (3.6.21) na tvar

$$\hat{i}_o = -I \frac{\hat{\delta}^2}{4 \operatorname{tgh}(\hat{\delta}a) \operatorname{tgh}(\hat{\delta}b)}. \quad (3.7.4)$$

Po dosazení proudové hustoty (3.7.4) do našeho redukovaného řešení (3.7.3) dostaneme tento výsledek

$$\hat{i}_r(x, y) = I \frac{\hat{\delta}^2}{4} \frac{\cosh(\hat{\delta}x) \cosh(\hat{\delta}y)}{\sinh(\hat{\delta}a) \sinh(\hat{\delta}b)}. \quad (3.7.5)$$

Je zřejmé, že položíme-li

$$\hat{\delta}_x = \hat{\delta}_y = \hat{\delta} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}, \quad (3.7.6)$$

obě řešení (3.7.1) a (3.7.5) jsou identická. Je splněna i podmínka (3.7.2). K tomuto výsledku se v práci [9] dochází v případě čtvercového průřezu.

Pro tyč obdélníkového průřezu jsou v práci [9] odvozeny přibližné vztahy pro útlumové konstanty $\hat{\delta}_x$ a $\hat{\delta}_y$

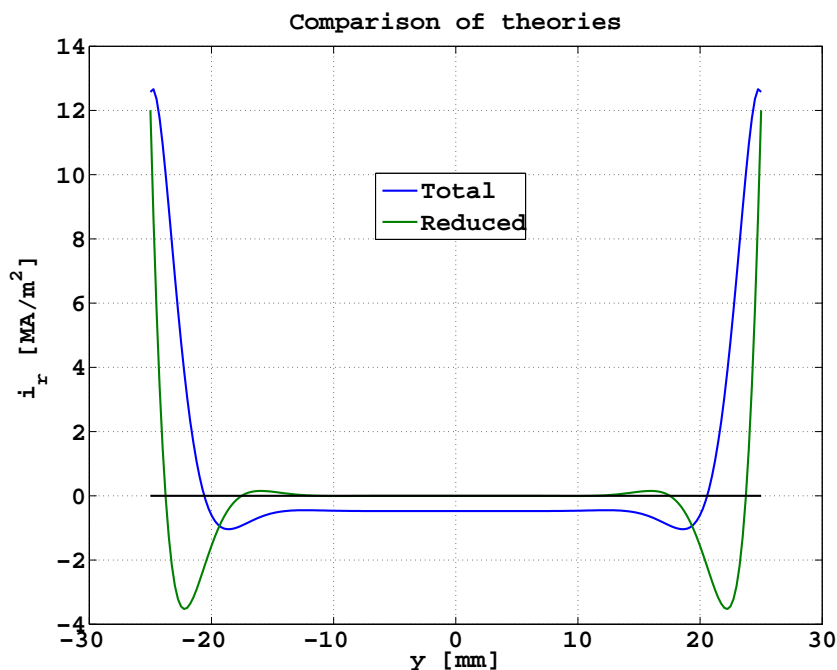
$$\hat{\delta}_x = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} \sqrt{\frac{2b}{a+b}}, \quad \hat{\delta}_y = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} \sqrt{\frac{2a}{a+b}}. \quad (3.7.7)$$

Je v nich tedy započten průřez vodiče, i když bezrozměrně.

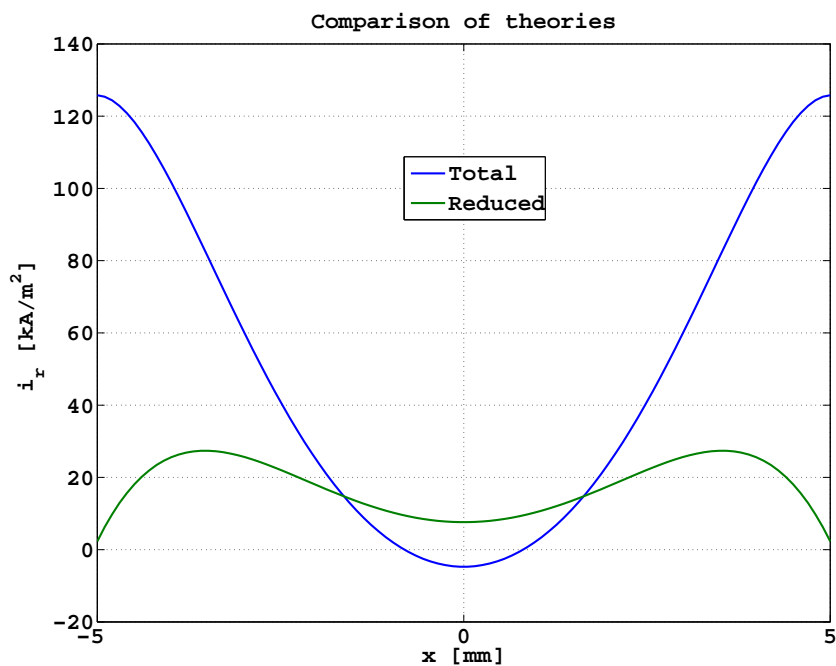
Rozbor těchto výsledků ponecháme do diskuse, zde pouze na obr. 3.7.1 uvedeme průběh proudové hustoty podle obou přístupů tj. podle úplného vztahu (3.6.19), který je označen "Total", a podle redukovaného vztahu (3.7.5), označený jako "Reduced". Podmínky byly úplně stejné jako u předchozích obrázků, jedná se o průběh proudové hustoty ve směru svislé osy Y . Zdánlivě to vypadá na přibližný souhlas, ve skutečnosti musel být graf vypočtený podle úplného vztahu (3.6.19) stokrát zvětšen, aby bylo možné porovnání.

Na obr. 3.7.2 je porovnání obou teorií pro průběhy podél vodorovné osy X . Nyní musel být pro změnu stokrát zvětšen průběh pro redukovaný vztah (3.7.5).

Význam těchto obrázků je v tom, že ukazuje jak, se podílí součin hyperbolických funkcí v (3.6.19) na celkovém průběhu. Pro případ průběhu podél osy Y dominuje, v řešení podél osy X je jeho příspěvek zanedbatelný. Dodejme, že průběhy pro upravené hodnoty podle (3.7.7) se kvalitativně neliší od průběhů na obr. 3.7.1 a obr. 3.7.2. Proto je neuvádíme. Podstatně se však liší koeficienty, kterými je musíme vynásobit či vydělit.



Obrázek 3.7.1: Porovnání proudové hustoty podél osy Y vypočtené podle dvou přístupů



Obrázek 3.7.2: Porovnání proudové hustoty podél osy X vypočtené podle dvou přístupů

3.8 Magnetické pole vodiče

V předchozím textu jsme ukázali, že průběh všech veličin ovlivněných skinefektom lze analyticky vypočítat uvnitř vodiče pro jednoduché, v praxi přibližně použitelné případy. Protože se žádná sonda nemůže dostat pod povrch vodiče, není možno vypočtené průběhy ověřit přímo. To se týká jak skinefektu, tak vířivých proudů. Tento problém je i u jiných oblastí

fyziky, např. podle teorie existuje v kapalinách obrovský vnitřní tlak. Ten však nemůžeme ze stejných důvodů změřit. Jeho existenci lze však ověřit z některých jeho důsledků.

U skinefektu je situace obdobná. Důkazem jeho existence je růst odporu vodiče se zvyšující se frekvencí. K ověření vypočtených průběhů to však nestačí. Nejjednodušší způsob je použít přesné měření vnějšího magnetického pole studovaného vodiče. V důsledku skinefektu není proud ve vodiči rozložen rovnoměrně, je soustředěn blízko jeho povrchu. Vnější magnetické pole bude tedy mít pro střídavý proud dostatečně vysoké frekvence poněkud jiný průběh než pro stejnosměrný proud, který je ve vodiči rozložen rovnoměrně.

Pro ověření analytických výpočtů je tedy důležité umět spočítat (a přesně změřit) průběh magnetického pole vně vodiče. V této kapitole pro jednoduchost naznačíme výpočet magnetického pole bez vlivu skinefektu. Nejprve uvedeme výpočet pro vodič obdélníkového průřezu, dále výpočet magnetického pole pro 3 fázovou soustavu naší sítě.

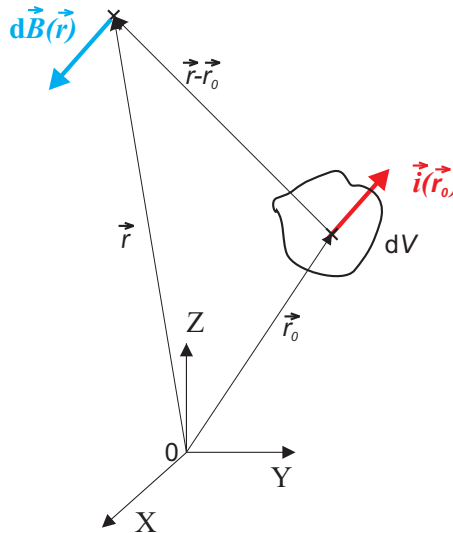
3.8.1 Biot-Savartův zákon

Pro výpočet magnetického pole vodiče budeme používat Biot-Savartův zákon. Začneme s tím, že vysvětlíme konvenci pro polohové vektory a souřadnice v něm používané.

Existují dva typy těchto objektů. Jednak to jsou polohové vektory pro objekty budící pole, v našem případě vektor $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ popisující polohu elementu vodiče dV , kterým protéká proud o proudové hustotě \vec{i}_0 . Polohové vektory a souřadnice budících prvků mají index 0 a nazveme je *materiálové*.

Dalším objektem je buzené magnetické pole. Polohové vektory pro buzené veličiny jsou bez indexu a popisují bod, ve kterém veličiny popisující toto pole počítáme. Nazveme je *polní* polohové vektory. V našem případě je to zejména magnetická indukce \vec{B} , počítáme ji v bodě o polohovém vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$.

Názorně jsou oba typy souřadnic na obr. 3.8.1. Současně jsou uvedeny i veličiny potřebné pro popis Biot-Savartova zákona.



Obrázek 3.8.1: Biot-Savartův zákon

Pro výpočet potřebujeme Biot-Savartův zákon v diferenciálním tvaru

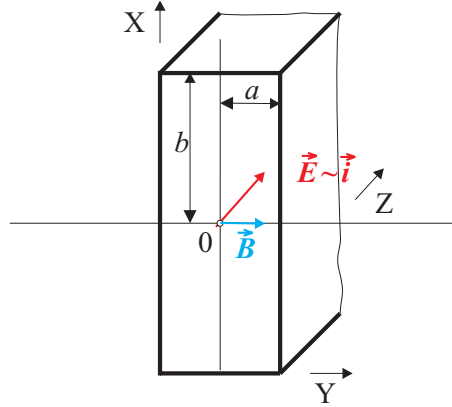
$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{i}(\vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} dV. \quad (3.8.1)$$

Pro vektorový součin je použit symbol ' \times '. Symbolem μ_0 je označena permeabilita vakua, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m}$. V Biot-Savartově zákonu je materiálový polohový vektor \vec{r}_0 použit pro

určení objemového elementu dV , což je současně bod, v němž potřebujeme znát proudovou hustotu $\vec{i}_0(\vec{r}_0)$. Polní vektor \vec{r} pak určuje bod, v němž počítáme příspěvek k indukci $d\vec{B}(\vec{r})$.

3.8.2 Magnetické pole vodiče obdélníkového průřezu

Biot-Savartův zákon aplikujeme na vodič obdélníkového průřezu. Schematicky jsou tvar vodiče a souřadná soustava znázorněny na obr. 3.8.2. Vodič má šířku $2a$ ve směru osy X , výšku $2b$ ve směru osy Y a délku $2L$ ve směru osy Z . Počátek souřadné soustavy je uprostřed vodiče, viz obr. 3.8.2. Proud teče ve směru osy Z . Proudová hustota \vec{i} má tedy směr kolmý k rovině XY .



Obrázek 3.8.2: Vodič obdélníkového průřezu

Nyní můžeme rozepsat vztahy (3.8.1) podle složek magnetické indukce. Jelikož proudová hustota \vec{i}_0 má směr osy Z , $\vec{i}_0 = (0, 0, i_0)$, vztahy se dosti zjednoduší.

$$\begin{aligned} dB_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i_0(y - y_0)}{\sqrt{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^3}} dx dy dz, \\ dB_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-i_0(x - x_0)}{\sqrt{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^3}} dx dy dz, \\ dB_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

Při rovnoměrném rozložení proudu v průřezu vodiče je proudová hustota dána vztahem

$$i_o = \frac{I}{S} = \frac{I}{4ab}, \quad (3.8.3)$$

kde I je celkový proud ve vodiči a $S = 4ab$ je plocha jeho průřezu v rovině kolmé ke směru proudu.

Výslednou magnetickou indukci $\vec{B}(\vec{r})$ ve zvoleném bodě o polohovém vektoru \vec{r} získáme integrací přes objem vodiče. V obecném případě je nutno tuto integraci provést numericky. Pokud chceme přesnější výsledky, je třeba si rozdělit vodič na velký počet elementů, řádově desetitisíce elementů. Ovšem při velkém počtu elementů nám porostou značně nároky na výpočetní výkon. V dalším ukážeme, jak lze tento výpočet urychlit.

3.8.3 Magnetické pole tří fázové soustavy

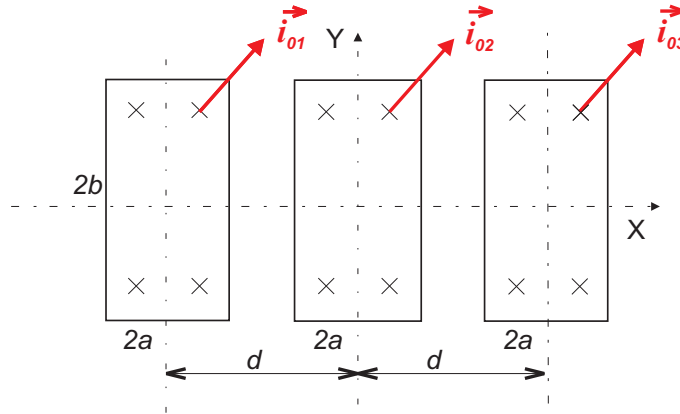
V této části ukážeme, jak lze vypočítat rozložení magnetického pole tří vodičů obdélníkového průřezu. Jelikož uvažujeme tří fázovou rozvodnou soustavu, protékající proud v každé fázi je posunut o 120° . Jednotlivé fáze označíme indexy 1, 2, 3 pro jednoduché programování.

V praxi se s ohledem na historický vývoj používá mnoha symbolů, (A, B, C) , (R, S, T) , (X, Y, Z) , (L_1, L_2, L_3) . Pro proudy tekoucími jednotlivými fázovými vodiči tedy platí vztahy

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{01} \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi), \\ I_2 &= I_{02} \cos(\omega t), \\ I_3 &= I_{03} \cos(\omega t + \frac{2}{3}\pi). \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

Magnetické pole bude superpozicí polí od všech tří fází. Vodiče mají šířku $2a$ a výšku $2b$ a jsou posunuty o vzdálenost d v ose X . V ose Y jsou vodiče ve stejné výšce, viz. obrázek 3.8.3. Proudové hustoty i_{01}, i_{02}, i_{03} jsou opět definovány vztahy (3.8.3). Předpokládáme rovnoměrné rozložení proudu ve vodiči, i když v trojfázové soustavě musí téci střídavý proud. Pro nízké frekvence je to však dosti přesně splněno.

K výpočtu opět použijeme Biot-Savartův zákon ve složkovém tvaru (3.8.2) a upravíme ho do následujícího tvaru.



Obrázek 3.8.3: Magnetické pole obdélníkových vodičů

$$\begin{aligned} dB_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{i_{01}(y - y_0)}{R_1^3} + \frac{i_{02}(y - y_0)}{R_2^3} + \frac{i_{03}(y - y_0)}{R_3^3} \right] dx dy dz, \\ dB_y &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{i_{02}(x - x_0)}{R_1^3} + \frac{i_{y01}(x - (x_0 - d))}{R_2^3} + \frac{i_{03}(x - (x_0 + d))}{R_3^3} \right] dx dy dz, \end{aligned} \quad (3.8.5)$$

$$dB_z = 0,$$

kde

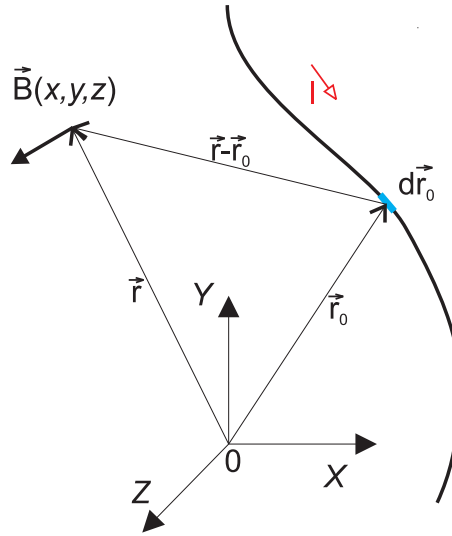
$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{[(x - (x_0 - d))^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]}, \\ R_2 &= \sqrt{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]}, \\ R_3 &= \sqrt{[(x - (x_0 + d))^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]}. \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

3.8.4 Rychlý výpočet magnetického pole masivních vodičů

V této části si ukážeme, jak podstatně zrychlit výpočet magnetického pole trojrozměrných masivních vodičů, pokud se jedná o přímé vodiče konečné délky. Základem je Biot-Savartův zákon v diferenciálním tvaru pro tenký drát, tenký drát, kterým protéká proud I

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{r}_0 \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}. \quad (3.8.7)$$

Snadnější pochopení BS zákona nám dává následující obrázek 3.8.4 znázorňující použitou geometrii.



Obrázek 3.8.4: Magnetické pole tenkého drátu obecného tvaru

Rovnici (3.8.7) rozepíšeme do složek

$$\begin{aligned} dB_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dy_0(z - z_0) - dz_0(y - y_0)}{\sqrt{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^3}}, \\ dB_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dz_0(x - x_0) - dx_0(z - z_0)}{\sqrt{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^3}}, \\ dB_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dx_0(y - y_0) - dy_0(x - x_0)}{\sqrt{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^3}}. \end{aligned} \quad (3.8.8)$$

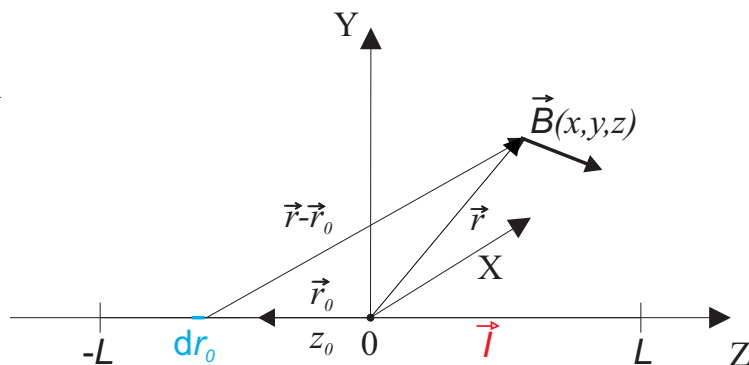
Uvažujme, že proud I protéká tenkým přímým drátem konečné délky $2L$ ve směru osy Z , viz obr. 3.8.5. Pak pro materiálový vektor a jeho přírůstek platí

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= (0, 0, z_0), \\ d\vec{r}_0 &= (0, 0, dz_0). \end{aligned} \quad (3.8.9)$$

Po formální integraci dostávají (3.8.8) tvar

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} I y \int_{-L}^L \frac{-dz_0}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^3}}, \\ B_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} I x \int_{-L}^L \frac{dz_0}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^3}}, \\ B_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.8.10)$$

S ohledem na válcovou symetrii lze uvažovat pouze rovinu Y, Z , tj. položit $x = 0$, viz



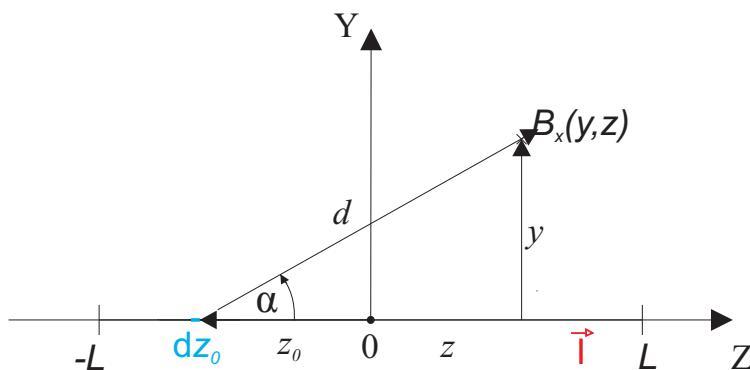
Obrázek 3.8.5: Magnetické pole tenkého drátu konečné délky

obr 3.8.6. Pak mají rovnice (3.8.10) tvar

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} y I \int_{-L}^L \frac{-dz_0}{\sqrt{[y^2 + (z - z_0)^2]^3}}, \quad (3.8.11)$$

$$B_y = 0,$$

$$B_z = 0.$$



Obrázek 3.8.6: Magnetické pole tenkého drátu — integrace podle úhlu

Snadnější je provést integraci podle úhlu α na obr. 3.8.6. Proto přetransformujeme tento integrál tak, aby byl závislý na elementu $d\alpha$ úhlu α . K transformaci mezi elementy dz_0 a $d\alpha$ využijeme goniometrické funkce podle obr. 3.8.6

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{z - z_0} \quad (3.8.12)$$

a

$$\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (z - z_0)^2}}. \quad (3.8.13)$$

Ze vztahu (3.8.12) vyjádříme souřadnici

$$z_0 = z - y \cotg \alpha. \quad (3.8.14)$$

Derivováním tohoto výrazu podle α získáme souvislost mezi diferenciály dz_0 a $d\alpha$ ve tvaru

$$dz_0 = y \frac{1}{\sin^2 \alpha} d\alpha, \quad (3.8.15)$$

jelikož souřadnice y a z jsou konstanty. Vztahy (3.8.15), (3.8.12) a (3.8.13) dosadíme do rovnice (3.8.11), kde za pomoci matematických úprav dostaneme výsledné řešení

$$B_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{y} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi y} I (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (3.8.16)$$

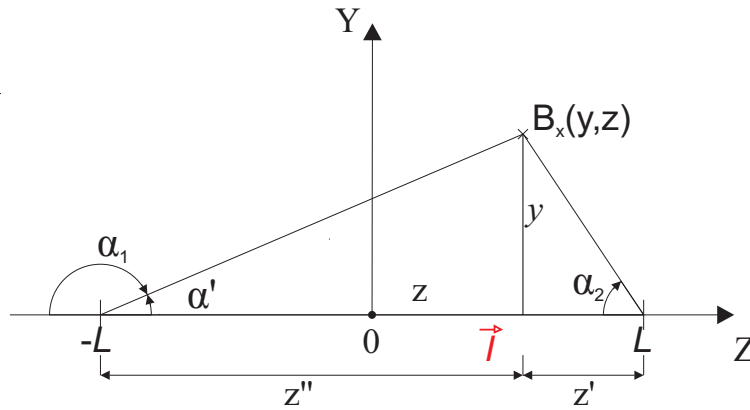
Úhly α_1 a α_2 jsou vysvětleny na obr. 3.8.7. Jeden z nich musí být větší než 90° . Místo kosinu úhlu α_1 a α_2 je vhodné použít souřadnice y a z podle obr. 3.8.7 kde,

$$\begin{aligned} \cos \alpha_2 &= \frac{z'}{\sqrt{y^2 + z'^2}} = \frac{L - z}{\sqrt{y^2 + (L - z)^2}}, \\ \cos \alpha_1 &= \cos(\pi - \alpha') = -\cos \alpha' = \frac{z''}{\sqrt{y^2 + z''^2}} = -\frac{L + z}{\sqrt{y^2 + (L + z)^2}}. \end{aligned} \quad (3.8.17)$$

Vztah (3.8.16) přejde na tvar

$$B_x(y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{y} \left(\frac{L - z}{\sqrt{(L - z)^2 + y^2}} + \frac{L + z}{\sqrt{(L + z)^2 + y^2}} \right). \quad (3.8.18)$$

Ostatní dvě složky jsou v rovině YZ nulové.



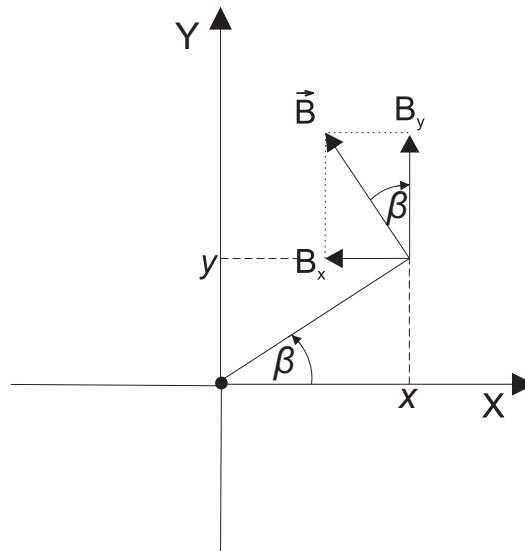
Obrázek 3.8.7: Magnetické pole tenkého drátu — definice integračních mezí

Analogicky můžeme odvodit rovnici pro složku magnetické indukce B_y v rovině XZ . Vztah (3.8.16) má tvar

$$B_y(x, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{x} \left(\frac{L - z}{\sqrt{(L - z)^2 + x^2}} + \frac{L + z}{\sqrt{(L + z)^2 + x^2}} \right). \quad (3.8.19)$$

Ostatní dvě složky jsou v rovině XZ nulové.

V obecném bodě o polohovém vektoru $\vec{r} = (x, y)$ jsou vztahy pro obě složky magnetické indukce složitější. Obě složky se odvodí z rovnice (3.8.10) a jsou funkcí třech proměnných: $B_x = B_x(x, y, z)$, $B_y = B_y(x, y, z)$. Situaci v rovině XY znázorňuje obr. 3.8.8.



Obrázek 3.8.8: Složky magnetické indukce tenkého drátu

Symbolem B označme celkovou magnetickou indukci. Pak z obr. 3.8.8 pro její složky plynou vztahy

$$\begin{aligned} B_x(x, y, z) &= -B \cos \beta = -B \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ B_y(x, y, z) &= B \sin \beta = B \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned} \quad (3.8.20)$$

kde β je úhel, který polohový vektor svírá s vodorovnou osou a výsledná magnetická indukce se svislou osou.

Pro celkovou indukci ve vztahu (3.8.20) platí

$$B(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[\frac{L - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (L - z)^2}} + \frac{L + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (L + z)^2}} \right]. \quad (3.8.21)$$

Tento vztah lze snadno odvodit ze vztahu (3.8.18) nebo (3.8.19), uvědomíme-li si, že souřadnice y , resp. x , udávají vzdálenost bodu, v němž magnetickou indukci počítáme, od osy drátu. V obecném případě pak tyto souřadnice ve vztazích (3.8.18), resp. (3.8.19), nahradíme délkou polohového vektoru $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a tak dostaneme vztah (3.8.21).

Kombinací vztahů (3.8.21) a (3.8.20) dostaneme konečný analytický výraz pro složky magnetické indukce v obecném bodě

$$\begin{aligned} B_x(x, y, z) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{y}{x^2 + y^2} \left[\frac{L - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (L - z)^2}} + \frac{L + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (L + z)^2}} \right], \\ B_y(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{x}{x^2 + y^2} \left[\frac{L - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (L - z)^2}} + \frac{L + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (L + z)^2}} \right], \\ B_z(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8.22)$$

Pro úplnost ještě uvedeme, jak lze získat analytický výraz přímou integrací pomocí primitivní funkce. Nyní uvažujeme obecný případ, že drát je sice rovnoběžný s osou Z a umístěn symetricky, avšak souřadnice jeho středu jsou $(x_d, y_d, 0)$. Pak mají výchozí rovnice

(3.8.10) tvar

$$\begin{aligned}
 B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} I(y - y_d) \int_{-L}^L \frac{-dz_0}{\sqrt{[(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}}, \\
 B_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} I(x - x_d) \int_{-L}^L \frac{dz_0}{\sqrt{[(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}}, \\
 B_z &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.8.23}$$

Integrand můžeme pro jednoduchost psát ve tvaru

$$f(z_o) = \frac{1}{((x - x_d)^2 + (y - y_d)^2 + (z - z_o)^2)^{3/2}} = \frac{1}{((z - z_0)^2 + K_{xy})^{3/2}}, \tag{3.8.24}$$

kde konstanta K_{xy} je definována vztahem

$$K_{xy} = (x - x_d)^2 + (y - y_d)^2. \tag{3.8.25}$$

Derivováním podle z_o se snadno přesvědčíme, že funkci (3.8.24) přísluší primitivní funkce

$$F(z_o) = \int \frac{1}{((z - z_0)^2 + K_{xy})^{3/2}} dz_o = -\frac{1}{K_{xy}} \frac{z - z_o}{\sqrt{(z - z_0)^2 + K_{xy}}}. \tag{3.8.26}$$

Po dosazení mezí $-L$ a $+L$ do primitivní funkce (3.8.26) a při použití vztahů (3.8.23) dostaneme po jednoduchých úpravách analytický výraz pro složky magnetické indukce

$$\begin{aligned}
 B_x(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{y - y_d}{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} \\
 &\quad \left[\frac{z - L}{\sqrt{(z - L)^2 + K_{xy}}} - \frac{z + L}{\sqrt{(z + L)^2 + K_{xy}}} \right], \\
 B_y(x, y, z) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{x - x_d}{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} \\
 &\quad \left[\frac{z - L}{\sqrt{(z - L)^2 + K_{xy}}} - \frac{z + L}{\sqrt{(z + L)^2 + K_{xy}}} \right].
 \end{aligned} \tag{3.8.27}$$

Umístíme-li drát do osy Z , tj. položíme-li $x_d = y_d = 0$, pak tyto vztahy jsou identické se vztahy (3.8.22), které byly odvozeny převážně z geometrických úvah. Dvě nezávislá odvození potvrzují správnost výsledných vztahů (3.8.27).

Pomocí vztahů (3.8.27) lze počítat magnetickou indukci přímého masivního vodiče tak, že se numericky integruje pouze přes jeho průřez. Pak vztahy (3.8.27) přecházejí na integrály

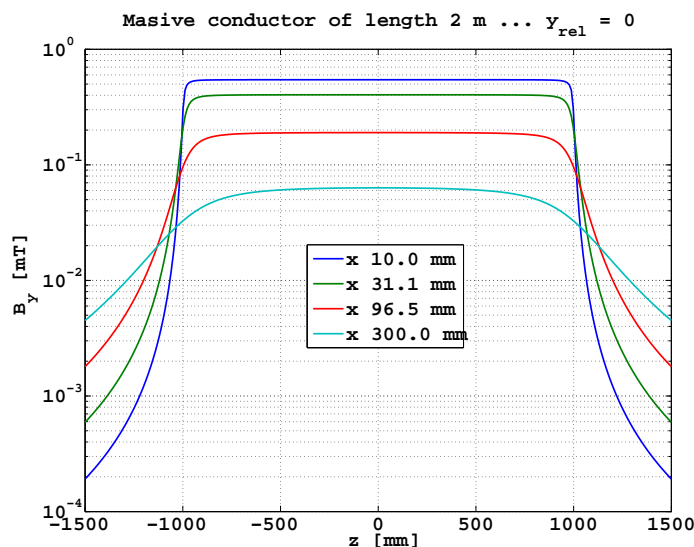
$$\begin{aligned}
B_x(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b i_o(x_d, y_d) \frac{y - y_d}{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} \\
&\quad \left[\frac{z - L}{\sqrt{(z - L)^2 + K_{xy}}} - \frac{z + L}{\sqrt{(z + L)^2 + K_{xy}}} \right] dx_d dy_d, \\
B_y(x, y, z) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b i_o(x_d, y_d) \frac{x - x_d}{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} \\
&\quad \left[\frac{z - L}{\sqrt{(z - L)^2 + K_{xy}}} - \frac{z + L}{\sqrt{(z + L)^2 + K_{xy}}} \right] dx_d dy_d, \\
B_z(x, y, z) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.8.28}$$

Pokud je proud ve vodiči rozložen rovnoměrně, získá se proudová hustota tak, že celkový proud vydělíme průřezem vodiče, viz též vztah (3.8.3).

Obecný postup předpokládá integraci přes objem. Proto je tato metoda minimálně o řád rychlejší při výpočtech. Délka vodiče je totiž jeho největší rozměr a tak vyžaduje nejvíce elementů. To nám též značně usnadní práci při optimalizování rozměrů vodičů. Vztah (3.8.28) byl použit téměř při všech výpočtech magnetické indukce. Pro úplnost uveďme, že obdobný postup se často používá, viz např. práci [23]

Pro ilustraci uvádíme na obr. 3.8.9 průběh magnetické indukce drátu s průřezem 10 x 50 mm, kterým protéká stejnosměrný proud 1000 A. Průběh je podél přímky rovnoběžné se směrem proudu (osa Z), která leží v různé vzdálenosti od osy vodiče.

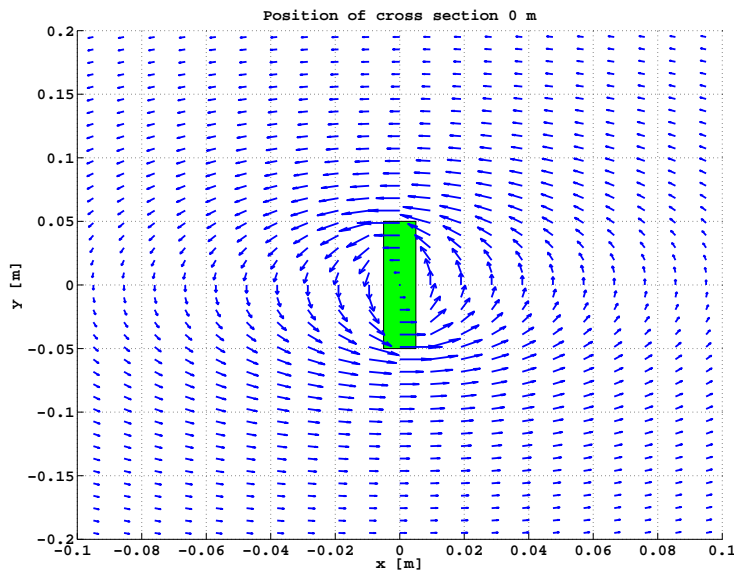
Tuto vzdálenost udává parametr. Je použita logaritmická stupnice pro magnetickou indukci. Je zobrazena pouze složka magnetické indukce B_y , složka B_x je v rovině $y = 0$ nulová. Podél drátu a v jeho relativní blízkosti je indukce téměř konstantní, za jeho konci prudce klesá. Fyzikálně tento případ není realizovatelný (proud začíná a končí), nicméně dobře popisuje průběh magnetické indukce pro polohy, které nejsou příliš blízko okrajů vodiče.



Obrázek 3.8.9: Magnetické pole masivního vodiče — průběh podél podélné osy

Poněkud názornější průběh magnetické indukce ve vektorové formě je na obr. 3.8.10. Jde

o tentýž případ jako na předchozím obrázku. Vektory jsou v hlavní rovině $z = 0$. Obrázek odpovídá fyzikálním představám.



Obrázek 3.8.10: Magnetické pole masivního vodiče — průběh v rovině kolmé k ose vodiče

Na obrázku je zajímavý zrakový klam. Zdá se, že mřížka není pravoúhlá, ale nepravidelná, případně místy zešíklená. Pokud však pozorně sledujeme počátky vektorů, o pravidelnosti a pravoúhlosti mřížky není pochyb.

3.9 Magnetické pole přímého vodiče s vlivem skinefektu a vířivých proudů

Při započítávání vlivu skinefektu se kombinují dva základní vztahy

1. Vztah (3.8.28) pro výpočet pole přímého vodiče numerickou integrací přes plochu průřezu.
2. Vztah (3.6.19) pro skutečnou proudovou hustotu ve vodiči ovlivněnou skinefektem.

Ve vztahu (3.8.28) již není proudová hustota konstantní, ale dosazuje se reálná složka proudové hustoty $i_o(x_d, y_d)$ pro zvolený bod průřezu o souřadnicích (x_d, y_d) , která se vypočte ze vztahu (3.6.19). Výpočet proběhne prakticky stejně rychle jako pro konstantní proudovou hustotu, poněvadž nejvíce času spotřebuje numerická integrace.

Pokud je vodič osamocený, vířivé proudy nemohou existovat. Je-li v jeho blízkosti jiný vodič s fázově neposunutým průběhem proudu, nebo s proudem v protifázi, vliv vířivých proudů je nulový, pokud proud dosahuje extrému, maxima, či minima. Pak též vybuzená magnetická indukce nabývá extrému, takže podle zákona elektromagnetické indukce je indukované elektrické pole nulové,

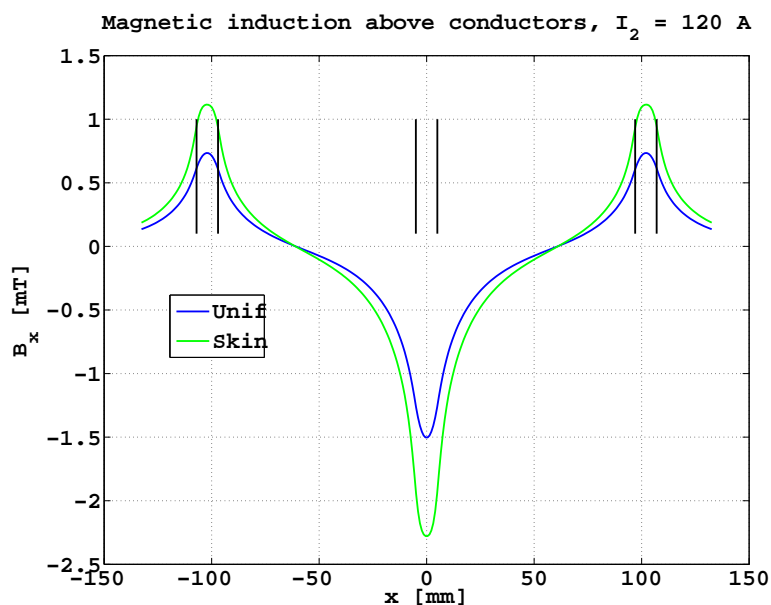
$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (3.9.1)$$

viz třetí rovnice základních Maxwellových rovnic (3.2.1).

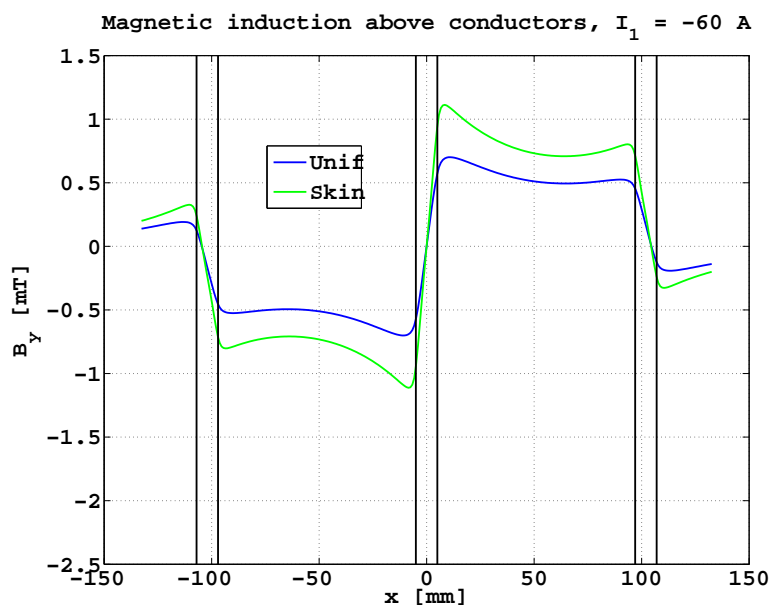
Jako ilustraci uvádíme na dalších dvou obrázcích výpočet magnetické indukce na přímce vedené těsně nad třífázovými vodiči se započtením a nezapočtením skinefektu. Vodiče jsou

však zapojeny jednofázově, tj. aktivní je jen střední vodič. V každém okamžiku teče středním vodičem proud o určité intenzitě, krajními vodiči pak v každém okamžiku tečou poloviční proudy opačným směrem. Příčný průřez vodičů se nezměnil, je 10 x 50 mm, délka je opět 2 m, avšak vzdálenost mezi středy vodičů je nyní 102 mm. Maximální proud ve středním vodiči je 120 A a jeho frekvence činí 1200 Hz, v souladu s následujícím experimentem.

Na obr. 3.9.1 je uvedena vodorovná složka magnetické indukce bez a se započtením skinefektu. Na obrázku jsou též naznačeny polohy vodičů. Skinefekt se při této frekvenci poměrně výrazně projeví. Totéž platí pro svislou složku magnetické indukce na obr. 3.9.2 .



Obrázek 3.9.1: Vliv skinefektu v jedné fázi, vodorovná složka magnetické indukce



Obrázek 3.9.2: Vliv skinefektu v jedné fázi, svislá složka magnetické indukce

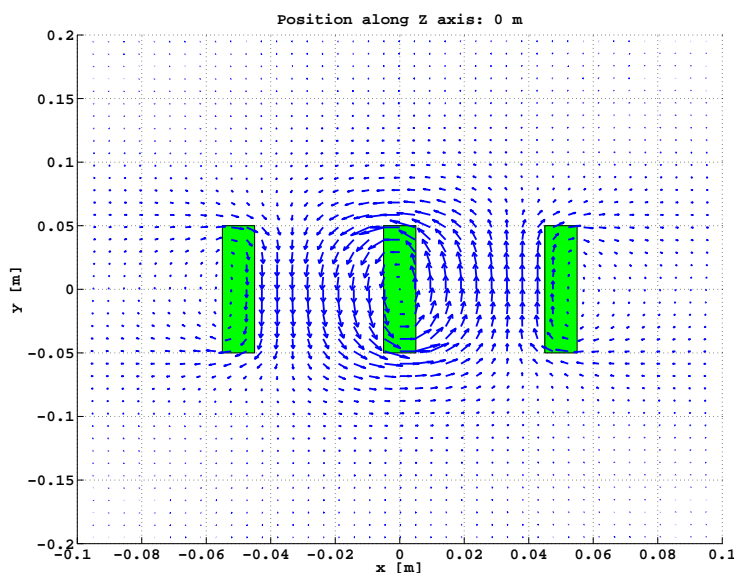
3.10 Magnetické pole trojfázové soustavy

Rovnice (3.8.28) lze též použít pro výpočet magnetického pole trojfázové soustavy, tj. pro tři rovnoběžné vodiče obdélníkového průřezu napájené ze tří fází. Vypočte se magnetická indukce od jednotlivých fází, přičemž se musí dosadit správná fáze proudu, viz vztahy (3.8.4), a správná poloha vodiče, viz obr. 3.8.3. Pak se tyto tři hodnoty pro každou složku magnetické indukce sečtou, viz též vztahy (3.8.5).

Pokud je oprávněný předpoklad, že proud je ve všech vodičích rozložen rovnoměrně, nevznikají žádné problémy. Pokud se při vyšších frekvencích uplatní jen skin efekt, lze postupovat stejně jako u jednoho vodiče. To je jen v případě, že vodiče jsou hodně od sebe vzdáleny. Pokud se ale uplatní vířivé proudy, je výpočet nemožný, protože efekt vířivých proudů nelze popsat analyticky. To je zejména v případě, že vodiče jsou blízko sebe. Zde nepomůže podmínka extrému, poněvadž extrémy v jednotlivých fázích jsou v různých okamžicích.

Nicméně skin efekt lze studovat i na trojfázové soustavě, proud ovšem zapojíme jen jednu fází, nejlépe do středního vodiče. Pak v krajních vodičích teče poloviční proud s opačnou fází a vířivé proudy se v principu neuplatní. Simulace tohoto případu byla již uvedena dříve na obr. 3.9.1 a 3.9.2.

Pro ilustraci uvádíme na obr. 3.10.1 průběh magnetické indukce ve vektorovém tvaru pro tři trojfázové vodiče. Průřez vodiče je 10 x 50 mm, vzdálenost mezi svislými osami vodičů je 50 mm. Maximální proud je 1000 A. Vektory jsou v hlavní rovině $z = 0$. Obrázek je pro okamžik $t = 0$. Středním vodičem teče maximální proud (směrem k pozorovateli), krajními vodiči poloviční proud opačnými směry. Obrázek odpovídá fyzikálním představám. Při výpočtu se předpokládala konstantní proudová hustota. Výsledky tedy platí pro nízké frekvence. Jak uvidíme v kapitole Výsledky, je to pro frekvence minimálně do 200 Hz.



Obrázek 3.10.1: Magnetické pole třífázové soustavy vodičů — průběh v rovině kolmé k ose vodiče

3.11 Výpočet napětí na povrchu vodiče

V odvození průběhu proudu v pravoúhlé tyči byl slabým místem předpoklad o konstantní proudové hustotě na povrchu tyče. Nejlepším ověřením je změření úbytku napětí v různých

polohách na povrchu. Jelikož úbytek napětí je malý, je nutno měření provést na poměrně velké vzdálenosti. Jelikož měření probíhá při střídavém proudu, vedle měřeného napětí se do měřicí smyčky indukuje vířivé napětí, které může výsledek výrazně zkreslit, jelikož i při všech opatřeních na jeho redukci plocha obklopená přívodními vodiči nikdy není nulová. Možné řešení je takové, že jednak změříme napětí na vodiči, kde se sčítá sledované napětí s napětím vířivým, jednak úsek vodiče odpojíme a zkratujeme, čímž měříme vířivé napětí. Detaily jsou v kapitole Experiment, část 4.6, zde provedeme teoretický výpočet.

Pro výpočet sledovaného napětí použijeme vztah

$$u_v + u_x = u_d, \quad (3.11.1)$$

kde u_v je indukované napětí způsobené vířivými proudy, u_x je skutečné napětí na vodiči a u_d naměřený úbytek napětí na vodiči. Obecně platí

$$u = U_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.11.2)$$

kde U_0 je (maximální) amplituda, ω je úhlová frekvence a φ fáze.

Dosazením (3.11.2) do (3.11.1) dostaneme

$$U_{v0} \sin(\omega t + \varphi_v) + U_{x0} \sin(\omega t + \varphi_x) = U_{d0} \sin(\omega t + \varphi_d). \quad (3.11.3)$$

Jelikož platí

$$\sin(\omega t + \varphi_x) = \sin \omega t \cos \varphi_x + \cos \omega t \sin \varphi_x, \quad (3.11.4)$$

po dosazení (3.11.4) do (3.11.3) dostaneme

$$\begin{aligned} U_{v0} \sin \omega t \cos \varphi_v + U_{v0} \cos \omega t \sin \varphi_v + U_{x0} \sin \omega t \cos \varphi_x + U_{x0} \cos \omega t \sin \varphi_x = \\ = U_{d0} \sin \omega t \cos \varphi_d + U_{d0} \cos \omega t \sin \varphi_d. \end{aligned} \quad (3.11.5)$$

Tyto rovnice upravíme pro lepší přehlednost

$$\begin{aligned} \sin(\omega t)(U_{v0} \cos \varphi_v + U_{x0} \cos \varphi_x) + \cos(\omega t)(U_{v0} \sin \varphi_v + U_{x0} \cos \omega t \sin \varphi_x) = \\ = \sin(\omega t)(U_{d0} \cos \varphi_d) + \cos(\omega t)(U_{d0} \sin \varphi_d). \end{aligned} \quad (3.11.6)$$

Tyto rovnice musí platit pro každý časový okamžik t , což lze zajistit jen tak, že koeficienty u $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$ se musí rovnat. Tak z rovnice (3.11.6) dostaneme dvě rovnice:

$$\begin{aligned} U_{v0} \cos \varphi_v + U_{x0} \cos \varphi_x &= U_{d0} \cos \varphi_d, \\ U_{v0} \sin \varphi_v + U_{x0} \sin \varphi_x &= U_{d0} \sin \varphi_d. \end{aligned} \quad (3.11.7)$$

Z nich můžeme vypočítat hledané veličiny U_{x0} a φ_x . Členy s těmito veličinami nejprve převedeme na levou stranu

$$\begin{aligned} U_{x0} \cos \varphi_x &= U_{d0} \cos \varphi_d - U_{v0} \cos \varphi_v, \\ U_{x0} \sin \varphi_x &= U_{d0} \sin \varphi_d - U_{v0} \sin \varphi_v. \end{aligned} \quad (3.11.8)$$

Nyní již lze určit fázovou konstantu φ_x . Vydělením první a druhé rovnice (3.11.8) dostaneme vztah

$$\varphi_x = \arctg \left[\frac{U_{d0} \sin \varphi_d - U_{v0} \sin \varphi_v}{U_{d0} \cos \varphi_d - U_{v0} \cos \varphi_v} \right]. \quad (3.11.9)$$

Umocněním první a druhé rovnice (3.11.8), sečtením a využitím vztahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dostaneme vyjádření pro U_{x0} v tomto tvaru

$$U_{x0} = \sqrt{(U_{d0} \cos \varphi_d - U_{v0} \cos \varphi_v)^2 + (U_{d0} \sin \varphi_d - U_{v0} \sin \varphi_v)^2}. \quad (3.11.10)$$

Kapitola 4

Experiment

Jak jsme zmínili, jediným jednoduchým způsobem, jak prokázat vliv skinefektu a vířivých proudů, je měření magnetického pole v okolí tří fázových vodičů. Proto se v této části budeme zabývat tím, jak toto magnetické pole budeme měřit, jaké použijeme měřicí přístroje, jak budeme naměřená data ukládat pro další využití atd. Měření magnetického pole v okolí vodičů je klíčovým měřením, aparatura však byla použita i k základním měřením obvodových veličin a napětí na povrchu vodičů. Protože se jednalo o měření v časové oblasti, bylo nutno měření automatizovat.

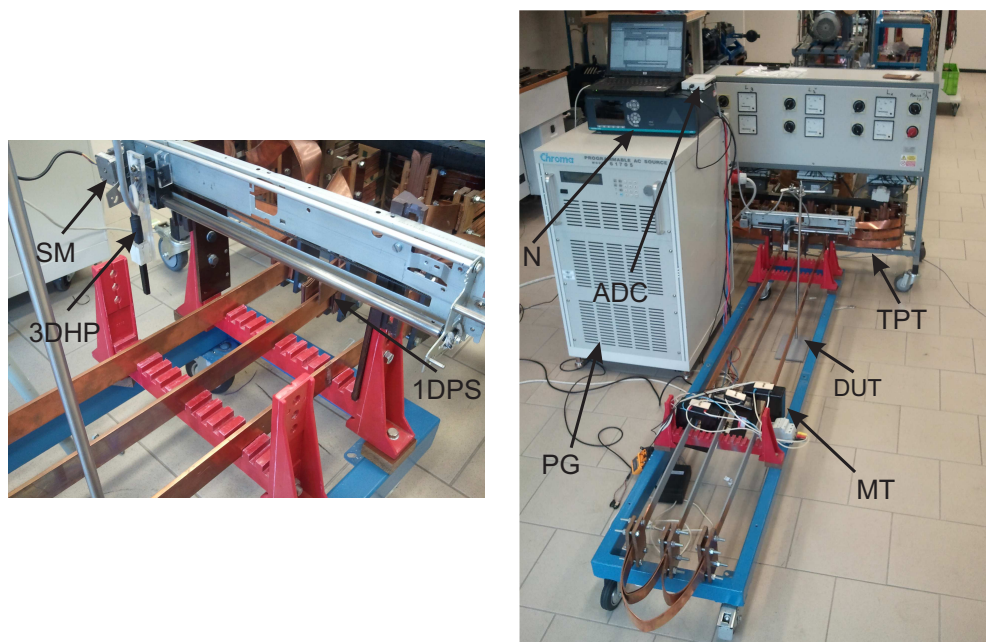
4.1 Celkové zapojení

Musíme si uvědomit, že toto měření není snadné. Pokud chceme měřit časově proměnnou magnetickou indukci v prostoru vodičů, ve velkém počtu bodů, vyžaduje to automatizované měření. Jinak by to bylo velice časově náročné. Proto budeme používat takové měřicí přístroje, které jdou připojit k osobnímu počítači, pomocí něhož budeme zaznamenávat data z měření "online". K programování měřících přístrojů a záznamu dat použijeme software MATLAB. Osobní počítač připojíme k těmto měřícím přístrojům pomocí rozhraní USB, GPIB a LAN.

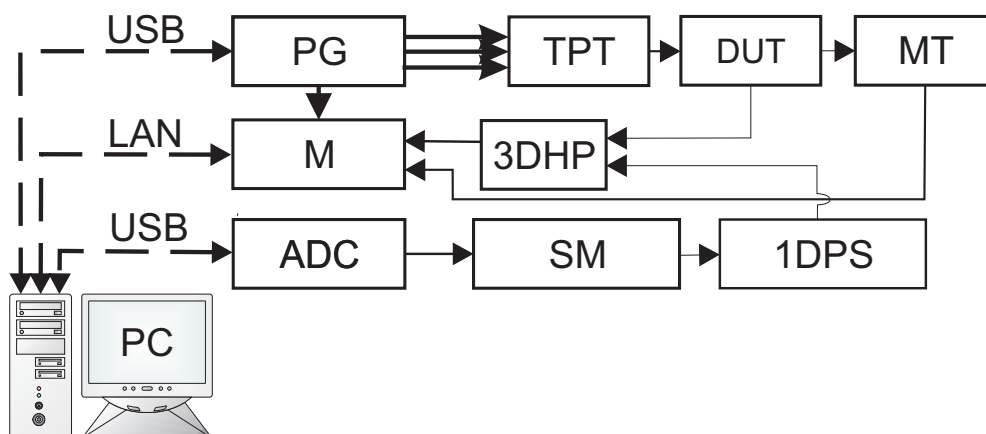
Obrázek 4.1.2 představuje celkový pohled na měřicí aparaturu a následující obrázek 4.1.2 blokové schéma zapojení jednotlivých měřících přístrojů. Jako zdroj použijeme programovatelný zdroj Chroma 61704 (PG), který je napájen z třífázové rozvodné sítě. Tento zdroj je připojen přes převodník GPIB/USB k počítači. Třífázový výstup z programovatelného zdroje je připojen na vstup proudových transformátorů (TPT), poněvadž potřebujeme získat velké proudy na sekundárním vynutí. Tyto transformátory lze na primární straně zapojovat buď do hvězdy, nebo do trojúhelníku, podle požadovaného výstupního proudu. Rovněž transformátory obsahují odbočky, pomocí kterých lze regulovat vstupní napětí. Tyto transformátory jsou speciálně vinuty tak, aby se dosáhlo při jejich zkratu maximálních proudů v řádu několika tisíc ampér.

Na tyto akční proudové transformátory jsou připojeny 3 měděné masivní vodiče (DUT). Lze je libovolně zaměnit za jiné, lze především v určitém rozmezí měnit vzdálenost mezi nimi. Konce vodičů jsou opatřeny zkratem pomocí měděných plechů. Sekundární vynutí je tedy zapojeno do hvězdy. Na vodičích jsou nasunuty měřicí transformátory proudu (MT), které jsou připojeny k měřicímu analyzátoru Norma 5000 (M). Na tomto měřícím analyzátoru lze též měřit libovolná napětí.

K měření vektoru magnetické indukce vně vodičů použijeme 3D Hallovu sondu (3DHP). Výstup z této sondy je připojen na napěťové vstupy analyzátoru Norma 5000. Sonda je připevněna na 1D pozičním systému (1DPS), který je poháněn krokovým motorem (SM). Ten je připojen k AD převodníku NiDaq (ADC), který ho ovládá.



Obrázek 4.1.1: Aparatura pro kompletní studii experimentálního modelu rozvodny



Obrázek 4.1.2: Blokové schéma aparatury

4.2 Popis měřících přístrojů

Měřící aparatura na obr. 4.1.1 a 4.1.2 obsahuje moderní měřící přístroje, jejichž základní parametry zde popíšeme.

1. Programovatelný generátor Chroma 61704

Tento univerzální moderní zdroj je velice vhodný pro naše experimenty. Zdroj je napájen z třífázové rozvodné sítě s proudovým výstupem 20 ampér na fázi. Frekvenční rozsah lze nastavovat v rozmezí 15 Hz až 1200 Hz. Výstupní trojfázové napětí lze měnit v plném rozsahu. Při dané frekvenci je to poměrně tvrdý zdroj, výstupní napětí málo klesá s rostoucím odebíraným proudem [26]. Tato možnost se dá využít i při testování experimentálního modelu na nestandardní stavy, např. přechodné jevy.

V této práci jsme použili jen harmonický (sinusový) trojfázový výstup. Možnosti zdroje jsou však nepoměrně větší. Především lze libovolně měnit úhel mezi fázemi, dále lze v každé fázi nastavit jiné napětí. Lze tedy vytvářet libovolnou nesymetrickou harmonickou trojfázovou soustavu.

Omezení na harmonický průběh však není nutné, jsou zde ještě další možnosti. Lze požadovat libovolný časový průběh na výstupu. Základní průběhy (obdélník, pila atd.) jsou přednastaveny, ostatní je možno naprogramovat. Tímto způsobem lze mj. experimentálně simulovat poruchy.

2. Měřicí analyzátor Norma 5000

Tento měřicí přístroj využíváme pro jeho vysokou přesnost. Obsahuje čtyři napěťové vstupy do 1000 V a čtyři proudové vstupy do 10 A. Dokáže zaznamenávat navzorkované průběhy s vysokou vzorkovací frekvencí 1024 MHz. Tři napěťové vstupy používáme pro měření výstupních napětí z 3D Hallovy sondy. Tři proudové vstupy používáme k měření fázových proudů ve vodičích prostřednictvím měřících transformátorů. Hodnoty napětí z Hallových sond a proudů z měřících transformátorů v software MATLAB přepočítáváme na správné hodnoty pomocí známých konstant.

3. AD převodník NiDaq

Tento převodník obsahuje 8 diferenčních nebo 16 unipolárních analogových vstupů s rozsahem do 10 V. Vzorkovací rychlost analogových vstupů je 400Ks/s. Tyto vstupy můžeme využít jako rezervu pro záznam napětí na vstupu a výstupu výkonových transformátorů, které budí proud ve studovaných vodičích. Dále obsahuje 64 digitálních vstupů a výstupů. Čtyři digitální výstupy používáme k řízení krokového motoru.

4. Tři jednofázové transformátory

Použity jsou transformátory od firmy SVED Liberec s výkonem 3 KVA. Transformátory jsou navrženy tak, abychom docílili vysokého proudového zatížení. Obsahují tyto napěťové odbočky na primárním vinutí (0/400/420/441/463/486/510/536/563/590/620/651). Pokud chceme snížit napětí na výstupu přepneme ze 400 voltového vinutí na některé jiné libovolné. V našem případě nemusíme tyto odbočky používat, protože používáme programovatelný zdroj, na kterém můžeme nastavit libovolné vstupní napětí. Primární vinutí transformátorů můžeme libovolně přepínat mezi trojúhelníkem nebo hvězdou s vyvedením středu podle potřeby (podle požadavku na proudové zatížení). Výstupní napětí na sekundárním vinutí je maximálně 1.5 V. Transformátory jsou připevněny k rámu spolu s voltmetry a ovládacími přepínači.

5. 3D Hallova sonda

3D Hallova sonda pro měření vektoru magnetické indukce se skládá ze tří čipů orientovaných v osách XYZ . Vše je zalito do pryskyřice, sonda má válcovitý tvar. Nevýhoda je v tom, že čipy měřící jednotlivé složky magnetické indukce, nejsou přesně uprostřed těla sondy kvůli jejich rozměrům. Proto je nutné při vyhodnocování výsledků měření provádět korekci na polohu příslušného čipu. Kompletní rozměry 3D Hallovy sondy jsou uvedeny v příloze na přiloženém CD.

Originální zapojení má unipolární výstup a naměřené Hallovo napětí bylo nutno odečíst od referenčního napětí 2.5 V. Při měření slabých polí, a tudíž i malých Hallových napětí, což je pro tuto práci typické, byla měřená napětí a vypočtené magnetické indukce zatížena velkou chybou. Proto bylo pozměněno zapojení, výstupní Hallovo napětí bylo přivedeno přímo na vstup zesilovače v rozsahu -2.5 až 2.5 V v diferenciálním módu. Abychom byli v tomto zapojení schopni určit jaké napětí odpovídá magnetické indukci, byla zhotovena Helmholtzova cívka a pomocí ní měřicí systém zkalibrován. Takto určená převodní konstanta umožnila spolehlivé měření magnetické indukce v řádu 100 μT . Pro porovnání poznamenejme, že zemské magnetické pole má typickou hodnotu kolem 50 μT . Detaily jsou v práci [24].

6. Měřicí transformátor

K měření vysokého proudu ve vodičích používáme měřicí transformátory od firmy Energoinvest s proudovým rozsahem do 1500 A. Výstupní proud je v rozsahu 0 až 5 A. Třída přesnosti je 0.5. Tyto měřicí transformátory jsou nasunuty na všechny tři měděné vodiče, abychom znali proudové zatížení v každé fázi.

7. Poziční systém

Zde je využita část z lineárního posuvu A3 tiskárny. Prakticky lze posuvu využívat v maximální délce necelých 400 mm. Pozice posuvu je řízena z AD převodníku Nidaq, kde na jeho výstupy je připojen jednoduchý DA převodník, který zajišťuje pohyb krokového motorku a tím pohybuje i celým pozičním systémem, na kterém je umístěna 3D Hallova sonda. Při čtyř pulzním řízení krokového motoru je vzdálenost mezi sousedními pozicemi měřící sondy 0.8 mm.

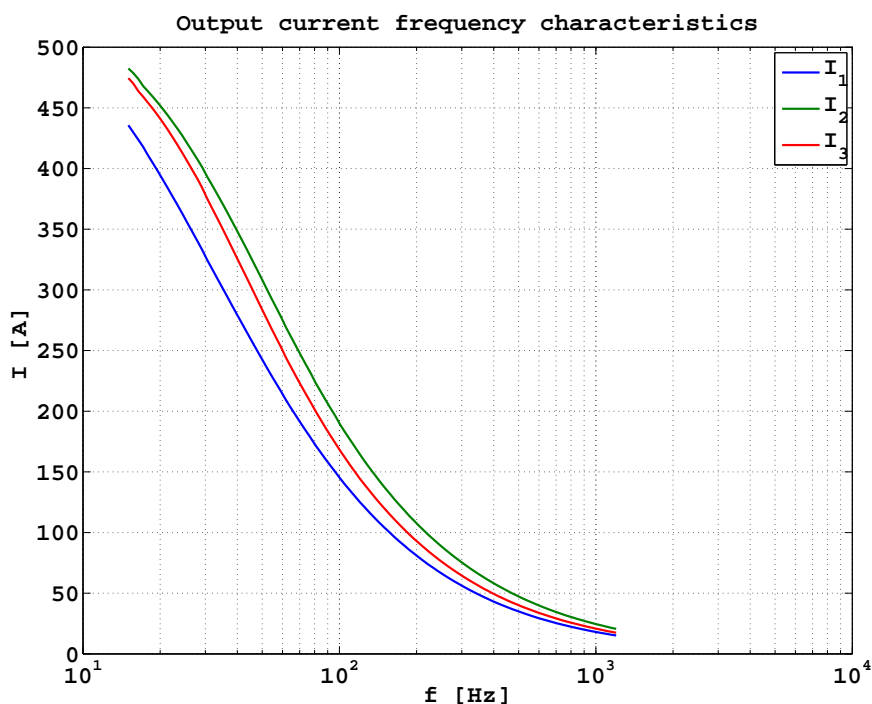
8. Masivní vodiče.

Jsou zde použity 3 měděné vodiče zapojené do hvězdy, dlouhé 2 metry s průřezem 5 x 40 mm. Zkrat je vytvořen z měděných pásky. Vodiče jsou propojeny s výkonovými transformátory rovněž měděnými pásky. Důvodem je možnost nastavování rozteče mezi vodiči v určitém rozmezí.

4.2.1 Vliv frekvence na výstupní proudy

Jedinou vadou měřící aparatury byla frekvenční závislost velkých proudů ve vodičích. S rostoucí frekvencí maximální proud ve vodičích výrazně klesal. To nepříjemně ovlivňovalo měření, poněvadž skinefekt se nejvýrazněji projevoval při nejvyšší frekvenci. Při této frekvenci však tekla nejmenší proud, magnetická indukce byla nejslabší a tudíž byla výrazně zatížena chybou pocházející zejména od šumu a rušení.

Experimentální frekvenční závislost výstupního proudu při konstantním napětí na primáru rovném 150 V je na obr. 4.2.1. Je vidět, že ve sledovaném frekvenčním pásmu proud klesne asi desetkrát.

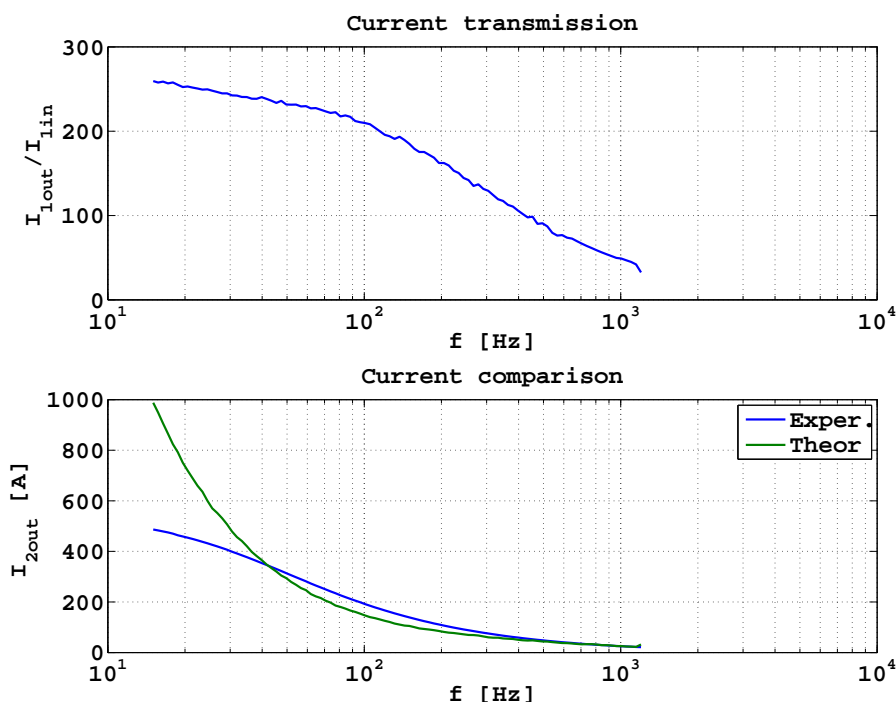


Obrázek 4.2.1: Závislost proudů ve vodičích na frekvenci.

Tento jev lze připsat, jak vlastnostem trojfázového zdroje Chroma, tak výkonovým transformátorům, které vytvářejí vysoký proud na výstupu. Pokud by mohly být považovány za ideální, přenos proudů a napětí by byl frekvenčně nezávislý. Připomeňme, že u ideálního transformátoru se předpokládá, že magnetický obvod je lineární, primárním i sekundárním vinutím prochází tentýž magnetický tok, což znamená, že koeficient vazby je roven jedné. Nejprůběžším požadavkem je nekonečná indukčnost primární cívky. U reálných transformátorů se může projevit právě vstupní indukčnost. S rostoucí frekvencí roste impedance na primáru a primární proud klesá. To může způsobit pokles proudu na sekundáru.

S cílem zjistit chování transformátorů jsme provedli měření frekvenční závislosti primárních i sekundárních proudů při konstantním napětí na primáru. Z nich jsme vypočítali přenos proudu, který je v horní části obr. 4.2.2. Z průběhu je zřejmé, že přenos proudu s rostoucí frekvencí klesá, transformátor tedy není zdaleka ideální. V okolí frekvence 50 Hz je však přenos proudu zhruba konstantní, možná že transformátor byl navržen jen pro tuto úzkou frekvenční oblast.

S cílem porovnat vliv primáru jsme sestavili velmi jednoduchý náhradní obvod transformátoru. Na primáru je paralelní kombinace indukčnosti 0.15 H a odporu 200 Ω . K nim je připojen ideální transformátor, avšak s frekvenčně závislým přenosem proudu podle grafu v horní části obr. 4.2.2. Porovnání naměřeného a teoreticky vypočteného proudu z tohoto velmi jednoduchého modelu je v dolní části 4.2.2. Při nízkých frekvencích je teoretický proud vyšší. To nepřekvapuje, při nízkých frekvencích se projevují materiálová omezení u všech transformátorů. Při vyšších frekvencích si křivky poměrně dobře odpovídají. Výkonové transformátory jsou asi hlavní příčinou nízkých proudů při vysokých frekvencích. Mohou zde hrát roli ale i další do modelu nezahrnuté jevy. Především to jsou ztráty způsobené vířivými proudy v jádře, které rostou se čtvercem frekvence. Jedním z řešení je použít tenčí případně kvalitnější plechy. Ty mohou způsobit pokles přenosu proudu. Chybu u výkonových transformátorů lze tedy spatřovat v návrhu, asi nebyl dán požadavek, aby pracovaly při frekvenci nad 1 kHz.



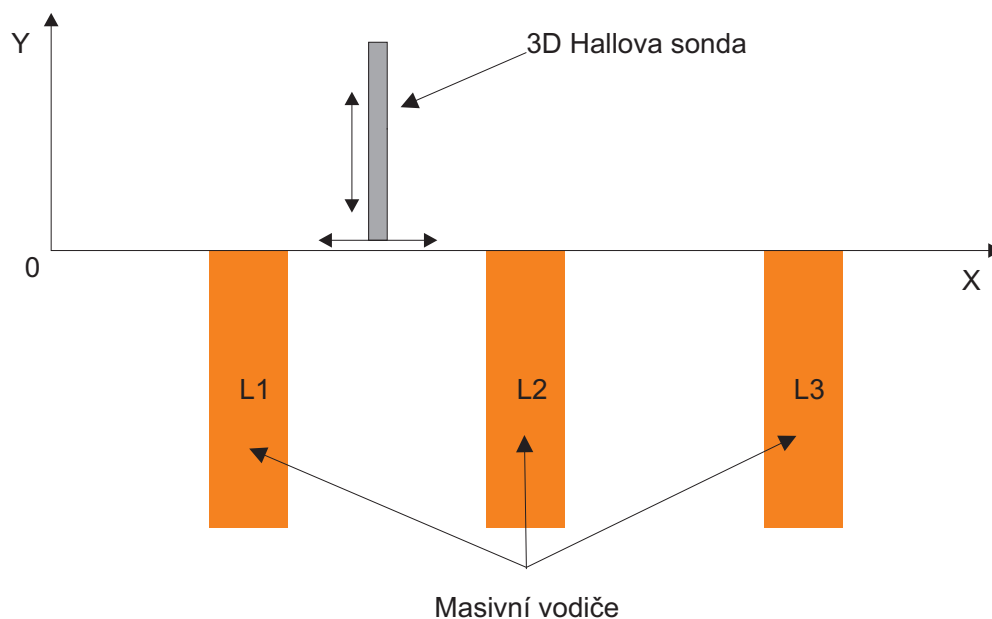
Obrázek 4.2.2: Experimentální a teoretická frekvenční závislost proudu u výkonového transformátoru

Ke zvýšení výstupního proudu při vysokých frekvencích, by se daly využít odbočky na primárním vinutí. Použijeme-li např. jen vinutí mezi svorkami 400 a 620 V, bude počet závitů zhruba poloviční. Indukčnost primárního vinutí klesne teoreticky čtyřikrát, primární proud čtyřikrát vzroste. Je nutno započíst, že přenos proudu klesne dvakrát, takže sekundární proud by měl být dvojnásobný. Prakticky je nutno postupovat při ověřování této možnosti opatrně, aby nedošlo k poškození zdroje Chroma či transformátoru.

4.3 Měření magnetického pole ve třech fázích

Předmětem hlavního studia jsou tři masivní vodiče, které napájíme třemi fázovými napětími. Ke kompletnímu studiu všech veličin používáme přístroje vyjmenované v části 4.2. Předběžnými experimenty v trojfázovém systému bylo zjištěno, že účinek povrchových jevů (vířivých proudů a skinefektu) je prokazatelný při všech frekvencích.

Velikost povrchových jevů studujeme ve frekvenčním pásmu napájecího proudu v rozmezí od 15 Hz do 1,2 kHz. Maximální proud, který vodiči protéká, se podle použité frekvence mění od 1500 do 250 A. Vektorové střídavé magnetické pole se prostřednictvím magnetické indukce měří na vybrané úsečce, která je těsně nad horním povrchem vodičů, (viz obr. 4.3.1), pomocí 3D Hallovy sondy. Měří se v časové oblasti s poměrně vysokou vzorkovací frekvencí přes několik period. Všechna naměřená data (vzorky) jsou uložena do paměti počítače. Pozice sondy ve směru osy X je řízena počítačem. Pozice ve směru osy Y je libovolně nastavitelná v držáku, viz. obrázek 4.3.1.



Obrázek 4.3.1: Poziční systém pro 3D Hallovu sondu

Předběžné zpracování dat ukázalo, že se výrazně uplatní vířivé proudy, které překryjí projevy skinefektu. Protože nám šlo především o ověření rozložení proudové hustoty podle podrobně rozpracovaného modelu, museli jsme měření pozměnit. Především bylo nutno budít jen jednu, a to prostřední fázi. Tím se ve středním vodiči eliminují vířivé proudy buzené vnucenými proudy v krajních vodičích. Krajními vodiči však tekou proudy zpět o poloviční intenzitě, které ve středním vodiči opět vytvářejí vířivé proudy, i když slabší. K jejich snížení se v aparatuře krajní vodiče oddálí na maximální možnou vzdálenost. Třetím, a nejúčinnějším opatřením bylo používat hodnoty při maximu budícího proudu ve středním vodiči. Pak je jeho derivace nulová a vířivé proudy teoreticky neexistují. První dvě opatření

byla experimentální a jsou popsána podrobněji níže, třetí softwarové, které je popsáno v kapitole Výsledky, část 7.4.3.

4.4 Měření magnetického pole v jedné fázi

Zde podáme poněkud konkrétnější informace. Pro studování skinefektu jsme použili jedno-fázový systém. Problém u jednotlivého vodiče je ten, že pokud měřený objekt doplníme smyčkou, tak proud musí téct v opačném směru v určitém místě v prostoru. Musíme tuto část vodiče umístit do značné vzdálenosti od měřeného objektu a to je v našich podmínkách nereálné.

Proto použijeme 3 přímé vodiče v aparatuře vzdálené od sebe 9.8 cm, což je přípustné maximum. Napájíme pouze prostřední vodič, fáze dva. Proud se nám vrací zpět ve dvou sousedních vnějších vodičích, tedy ve fázi jedna a tři. Proud tekoucí v krajních fázích má stejnou amplitudu a stejnou fázi. Oproti proudu ve středním vodiči je to fáze opačná. Z toho vyplývá symetričnost vůči prostřední fázi.

Na prostřední fázi nastavujeme pro zvolené frekvence napětí takové, abychom nepřesáhli proudový rozsah měřicího transformátoru. Snažíme se, aby v prostřední fázi tekla proud okolo 1500 A. Tuto hodnotu nastavujeme úměrným vstupním napětím. Ovšem pro vyšší frekvence nedokážeme nastavit proud v prostřední fázi na přibližnou hodnotu 1500 A, jelikož jsme už na maximu napěťového rozsahu programovatelného zdroje Chroma. To má za následek pokles proudu, a tím i snížení magnetické indukce nad vodiči. To jsme již popsali v části 4.2.1.

Naměřená data magnetické indukce jsou značně zkreslena šumem. Proto je nutné, data nejprve upravit tak, aby se s nimi mohlo dále pracovat, což je popsáno v kapitole Výpočty, sekce 5.1.3.

4.5 Spolehlivé měření skinefektu

Zpracování dat z měření v jedné fázi, ale v trojfázovém uspořádání podle části 4.4, ukázalo, že vířivé proudy se opět uplatní, i když nepoměrně slaběji. Optimální řešení by bylo vést zpětný vodič alespoň ve vzdálenosti 1 m od vodiče studovaného. Experimentální realizace však naráží na technické potíže. Vlastními prostředky se nepodařilo dosáhnout dostatečných proudů, takže naměřené výsledky nelze spolehlivě zpracovat a posoudit.

4.6 Veličiny na povrchu vodiče

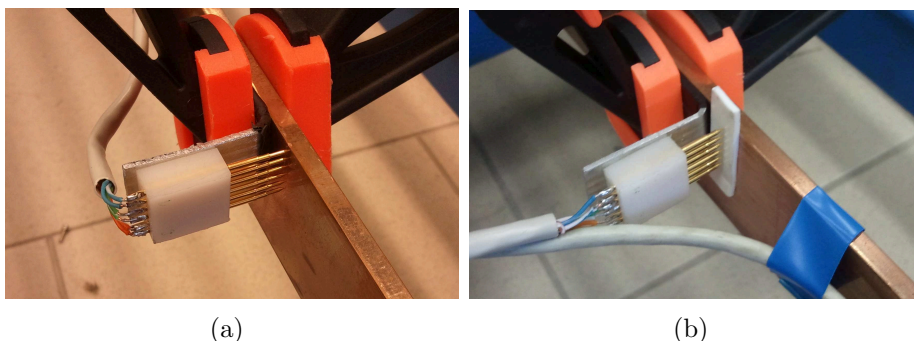
Dalším poměrně snadno realizovatelným měřením je měření úbytku napětí na povrchu vodiče mezi dvěma body, které jsou ve stejné vzdálenosti od hrany vodiče. Lze to provést např. jehlovými sondami.

Sada sond obsahovala šest odpružených pozlacených hrotů, které byly umístěny na úsečce, viz obr. 4.6.1. Rozteč špiček hrotů je 2.5 mm. Na konce těchto hrotů byl napájen svazek ethernetového kabelu, jelikož je kroucený a tak lépe odolává rušení. Měření jsme provedli pouze na hrotech 1, 3 a 5.

Na obrázku 4.6.1a si můžeme prohlédnout konstrukci a umístění měřících hrotů. Napětí se měřilo mezi dvěma sondami, které byly od sebe vzdáleny 1 m, viz. obrázek 4.6.2. Zpětný svazek vodičů od vzdálené sondy byl připevněn na studovaný vodič z důvodu omezení indukovaného napětí minimalizací plochy v uzavřené měřící smyčce. Veškeré přívodní vodiče pro měření napětí jsme se snažili do sebe zakroutit a nevytvářet tak zbytečně smyčky, viz. obrázek 4.6.2.

Poměrně rozsáhlý experiment byl proveden v zapojení s buzením proudu v jedné prostřední fázi. Problém je v tom, že na měřicím přístroji se měří vektorový součet hledaného úbytku napětí na masivním vodiči a napětí, které časově proměnné magnetické pole indukuje ve smyčce tvořené úsekem masivního vodiče a přívodními vodiči. S cílem odstranit indukované napětí v měřicí smyčce je nutné jej nejprve změřit. Proto jsme provedli tři typy měření:

1. Měření úbytku napětí na masivním vodiči. Sondy se umístily kolmo na protékající proud a rovnoběžně s nejdelší stranou měděného vodiče. Měřili jsme zde tři úbytky napětí na třech úsečkách.
2. Měření napětí naprázdno. Tato orientační část měla zjistit, jak velké rušení se naindukuje do přívodních kabelů. Sondy byly odizolovány od vodiče polyamidovou podložkou, viz obr. 4.6.1b.
3. Měření indukovaného napětí vyvolaného časově proměnným magnetickým polem ve smyčce. V této části jsme měřili indukované napětí ve smyčce, která by měla být identická se smyčkou v části 1, ale odizolovaná od masivního vodiče. Prakticky to znamenalo odizolovat obě sady sond od vodiče a zkratovat je tak, aby se plocha obklopená smyčkou nezměnila. Vyzkoušeli jsme několik možností: volný vodič, tuhý drát a měděný pásek s izolací, který se projevil jako nejvhodnější řešení. Sondy se umístily na měděný pásek, který se nalepil na povrch vodiče. Pásek od vodiče byl odizolován z obou stran povrchu a konce se odizolovaly z jedné strany podle umístění dosedajících hrotů. Tímto způsobem jsme získali smyčku a dokázali změřit nežádoucí indukované napětí.

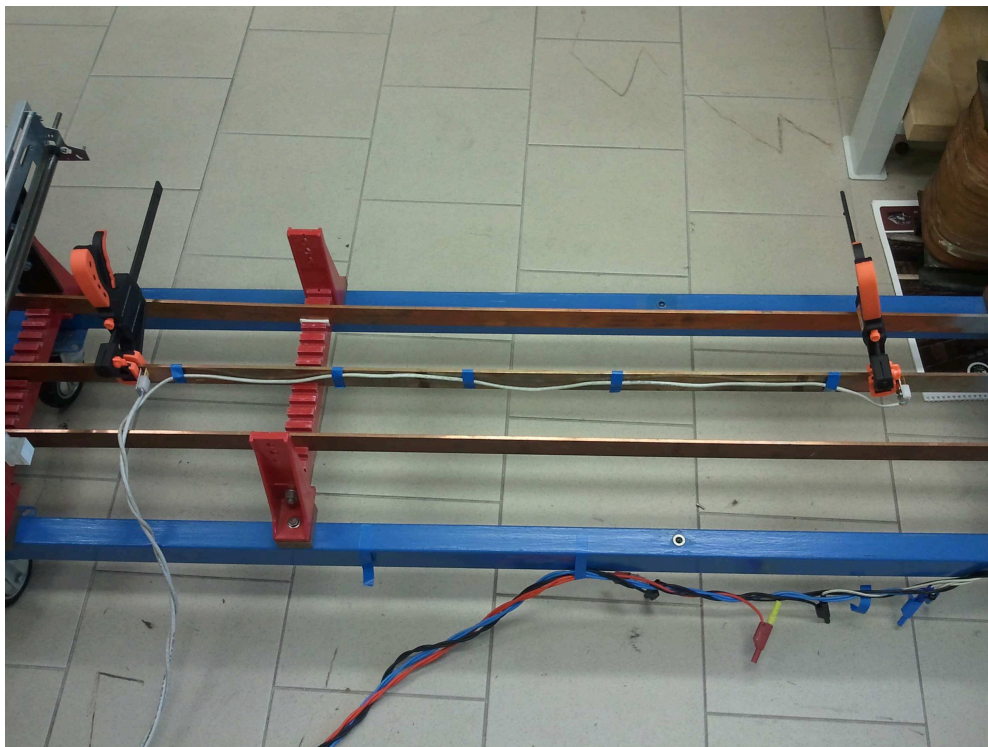


Obrázek 4.6.1: Sonda pro měření napětí na povrchu masivního vodiče – a) Umístění hrotů b) Odizolování hrotů od vodiče

V experimentu jsme použili tutéž aparaturu jako pro měření magnetického pole s buzením jen středního vodiče. Měření bylo v časové oblasti. Měřili jsme tři napětí mezi příslušnými hroty sond. Rovněž jsme měřili výstupní proud ve všech fázích, abychom mohli zjišťovat fázový posun napětí vůči proudu. K měření výstupních napětí a proudů jsme použili měřicí přístroj Norma 5000. Jako generátor zde byl použit programovací zdroj Chroma 61704.

Všechna tato případy měření jsme prováděli pro vybrané frekvence 15, 45, 135, 405, 1200 Hz při vzdálenosti sond rovné 1 m. Výstupní zkratový proud byl nastaven na konstantní hodnotu pro všechny zvolené frekvence. Jelikož pro frekvenci 1200 Hz byl maximální zkratový proud $I_{max} = 110\text{A}$, ostatní budící napětí pro zbylé frekvence se musely tomuto omezení přizpůsobit a to podle tabulky 4.6.1.

Zpracování dat a orientační obrázky jsou v kapitole Výpočty, část 5.1. Důležité výsledky jsou v kapitole Výsledky, část a diskuse k nim následuje ve stejnojmenné kapitole.



Obrázek 4.6.2: Pohled na umístění sond a přívodních vodičů

Tabulka 4.6.1: Budící primární napětí

Frekvence [Hz]	15	45	135	405	1200
Budící napětí [V]	11	16,6	38,7	106,4	300

Kapitola 5

Výpočty

Důležitou součástí práce byly výpočty. Jednak sloužily k názornému zobrazení a pochopení výsledků získaných v teoretické části, jednak byly nutnou operací při úpravě a zpracování digitálních signálů, které byly výstupem experimentu. V této části začneme právě popisem základního zpracování experimentálních souborů, pak se stručně zmíníme o výpočtu a zobrazení průběhu polí ovlivněných skinefektem, zejména uvnitř pravoúhlé tyče a nakonec podrobněji pojednáme o výpočtu vnějšího magnetického pole masivního vodiče a třífázové soustavy za různých podmínek. Dodáme též část zabývající se měřením úbytku elektrického napětí v různých polohách, vzhledem k hraně, na povrchu masivního vodiče.

Podobně, jako v teoretické části, budou zde v grafické formě uvedeny ilustrativní výsledky. Podrobnější prezentace všech zajímavých a významných výsledků bude ve stejnojmenné kapitole Výsledky.

5.1 Úprava signálů

Všechna měření byla provedena v časové oblasti. Jinak to asi ani nebylo možné, poněvadž pracujeme se střídavými proudy. Po nastavení parametrů experimentu byl při konstantní frekvenci digitálně nasnímán určitý časový úsek dat, která obsahovala průběh nastavených harmonických proudů, jako budících veličin, a průběh napětí (přímo měřených nebo z 3D Hallovy sondy) jako odezvu. Vzorkovací frekvence byla vždy natolik vysoká, že rozdíl mezi sousedními vzorky byl malý. Data tak bylo možno v prvním přiblížení pokládat za spojitá.

Doba snímání (neboli počet sejmutých vzorků) byla nastavena tak, že při kterékoliv budící frekvenci byl sejmut zhruba stejný počet period. Zpravidla to bylo kolem deseti. Počáteční okamžik snímání bez dalších opatření, který jsme nepoužili, byl zcela náhodný. Pro porovnání jednotlivých sejmutých průběhů bylo nejprve nutno naměřená data synchronizovat.

Protože byla měřena poměrně nízká napětí, v řádu mV, dalším problémem bylo odstranění rušivých signálů a šumu. Jako největší zdroje rušivého signálu byla zejména výkonová síť 50 Hz, dále pak působení spínaných zdrojů. O řešení těchto problémů pojednáváme dále.

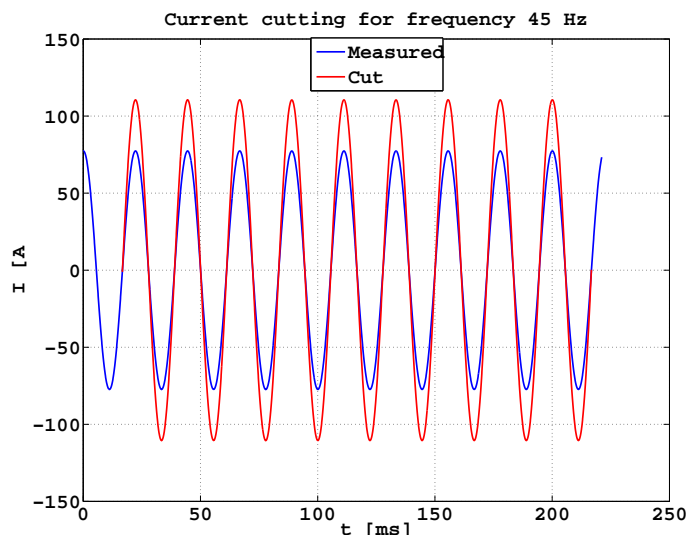
5.1.1 Synchronizace

K synchronizaci byl použit budící proud, poněvadž ten nabývá velké hodnoty stovky ampér, takže byl zatížen šumem a rušením nepatrně. Počáteční čas vybraného úseku byl získán jako první vzestupný průchod nulou. Jednoduchý algoritmus byl založen na dvou po sobě následujících postupech. První část spočívala v tom, že od počátku dat byly v naměřeném souboru dat porovnávány sousední hodnoty. Index prvního vzestupného průchodu nulou byl

stanoven z podmínky, že levý vzorek (první z dvojice) má nekladnou hodnotu a pravý vzorek (druhý z dvojice) má hodnotu nezápornou. S cílem získat maximální rozsah byl konečný čas úseku zjišťován jako poslední vzestupný průchod nulou a to tak, že sousední vzorky byly porovnávány od konce naměřených dat směrem k počátku. Podmínka nyní byla opačná, levý vzorek (druhý z dvojice) má nekladnou hodnotu a pravý (první z dvojice) nezápornou.

Chyba takto určeného okamžiku vzestupného průchodu nulou dosáhla v nejhorším případě délky vzorkovací periody. Jelikož byla použita vysoká frekvence vzorkování, tato chyba byla zanedbatelná. Interpolací bylo samozřejmě možné určit tento okamžik přesněji, z výše uvedeného důvodu jsme ji však nepoužili.

Příklad vyříznutého úseku je na obr. 5.1.1. Naměřený úsek obsahuje téměř deset period, počáteční a konečná fáze jsou však náhodné. Po oříznutí se k dalšímu zpracování použilo devět period. Vybraný úsek má tu výhodu, že začíná a končí stejnou fází, které přísluší nulová hodnota a kladná derivace¹. Pro zřetelnost byl na obrázku 5.1.1 vybraný úsek zvětšen ve směru svislé osy.



Obrázek 5.1.1: Vyříznutí přesně definovaného úseku dat

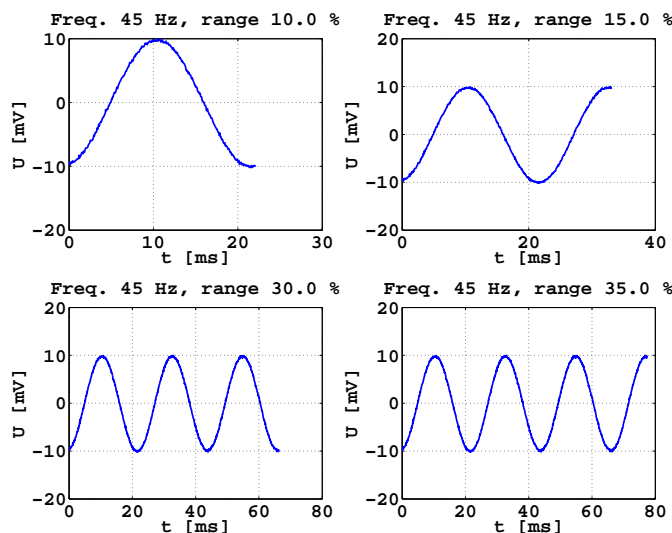
Takto získané indexy pak posloužily k výběru stejného úseku v sejmutém časovém průběhu závislých veličin, kterými jsou např. napětí a magnetická indukce. Poněvadž se jedná o digitální data sejmutá z jednoho přístroje, počáteční časové okamžiky souhlasí, pokud ovšem zanedbáme skutečnost, že průběhy jsou snímány postupně, tedy následující průběh je poněkud zpožděn oproti předchozímu. Poněvadž se jednalo maximálně o čtyři měřené časové průběhy, toto zpoždění bylo možné zanedbat proti vzorkovací periodě. Takže můžeme říci, že počáteční indexy zajistí, že všechny sejmuté veličiny začínají ve stejné fázi a zásluhou koncových indexů ve stejné fázi i končí. To mimo jiné umožní velmi jednoduše posoudit v časové oblasti fázový vztah měřených napětí a magnetické indukce vzhledem k budícímu proudu.

5.1.2 Rozmazávání spektra

Podmínka nulové hodnoty budícího proudu nebyla pro následné zpracování nutná, poskytovala však větší pohodlí. Nutná byla ale podmínka celého počtu period pro aplikaci rychlé Fourierovy transformace, FFT. Důsledky nesplnění této podmínky ukazuje tento příklad.

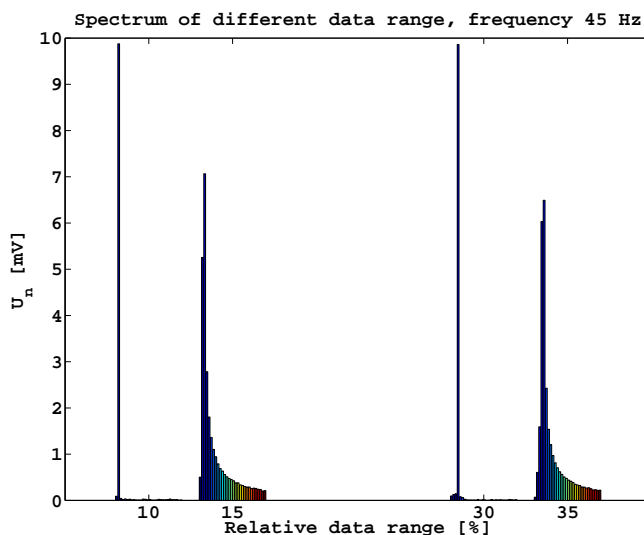
¹Tato derivace se chápe jako derivace zprava na počátku úseku a derivace zleva na jeho konci.

Poněvadž bylo sejmuto s dosti velkou přesností deset period, úseky vybrané od počátku dat v rozsahu 10, 20, 30 procent atd. z celkové délky naměřených dat obsahují jednu, dvě, tři atd. periody. Naproti tomu úseky relativní délky 15, 25, 35 procent atd. mají o polovinu periody navíc, viz obr. 5.1.2 ².



Obrázek 5.1.2: Vybrané úseky v časové oblasti

Aplikujeme-li na tyto průběhy FFT, dostaneme spektra podle obr.5.1.3. Na tomto obrázku jsou porovnány dvě skupiny amplitudového spektra, v levé části se jedná o 10 a 15 procent délky signálu, vpravo je to pro 30 a 35 procent.



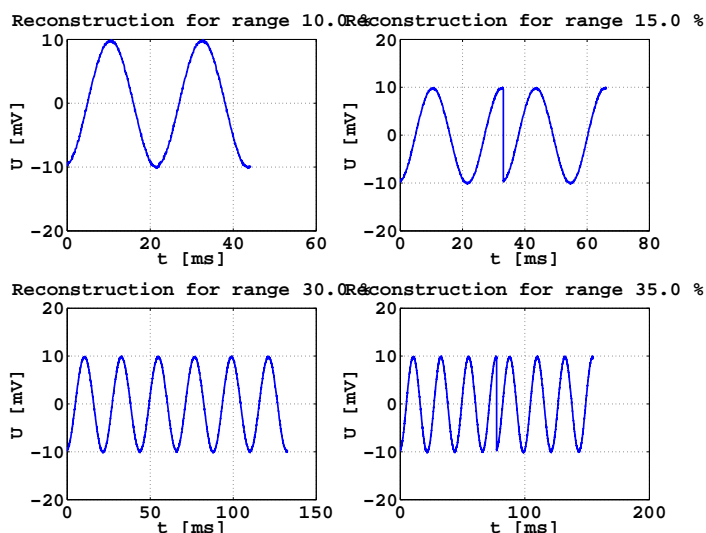
Obrázek 5.1.3: Amplitudové spektrum pro různé délky časového průběhu

Z tohoto obrázku je zřejmé, že pokud se zpracovává celý počet period (jedna nebo tři), má amplitudové spektrum jedno ostré maximum. Jako vedlejší výsledek je příznivá skutečnost, že generátor produkuje kvalitní harmonický průběh a další obvody jej zkreslí jen nepatrně. Pokud se přidá půl periody navíc, je spektrum hodně rozmazané. To je zřejmé z pravých částí dvou úseků na obr. 5.1.3 pro 15 a 35 procent celkové délky signálu. Ještě dodáme, že

²Jsou použita data pro napětí na povrchu vodiče, pro proud by však byl výsledek analogický.

amplitudové spektrum nezávisí na počáteční fázi, ta se projeví až ve fázovém spektru. To však zde z prostorových důvodů neuvádíme.

Rekonstrukce průběhu v časové oblasti vysvětluje rozdílné chování amplitudového spektra. V časové oblasti se musí datový úsek, na který byla aplikována FFT, periodicky opakovat bez ohledu na to, jak vypadá originál. Dvě sousední periody pro spektrum na obr. 5.1.3 jsou na obr. 5.1.4. Při volbě délky úseku rovné násobku periody je časový průběh harmonický, levá část obr. 5.1.4. Pokud přidáme půl periody, harmonický průběh je narušen, pravá část obr. 5.1.4. Amplitudové spektrum je pak pro tento časový průběh komplikovanější.



Obrázek 5.1.4: Rekonstrukce časového průběhu ze spektra

Pokusy pro rostoucí počet period ukázaly, že ke zhruba stejnému rozmazání spektra dochází bez ohledu na počet zvolených period. Neplatí tedy představa, že na úseku obsahujícím velký počet period již na oříznutí nezáleží, nebo záleží jen málo. Z toho také plyne, že stejně nešťastný je postup doplňování nul, aby se získala chybějící část naměřených dat do počtu mocnina dvou.

Pro úplnost dodejme, že k vyhlazení spektra se používá váhová funkce v časové oblasti. Existuje velký počet těchto funkcí, pro naše účely mají však společnou nevýhodu, že zkreslí (sníží) amplitudu signálu na počátku a konci vyšetřovaného průběhu. Proto jsme tuto možnost podrobně nezkoumali.

5.1.3 Redukce rušení a šumu

Existuje řada chytře vymyšlených a různě složitých metod k redukci těchto jevů. Z praktických důvodů jsme se však omezili na dvě nejjednodušší možnosti:

1. Metoda klouzavého průměru.
2. Metoda Fourierovy transformace.

Metoda klouzavého průměru je rychlá, má však několik nevýhod.

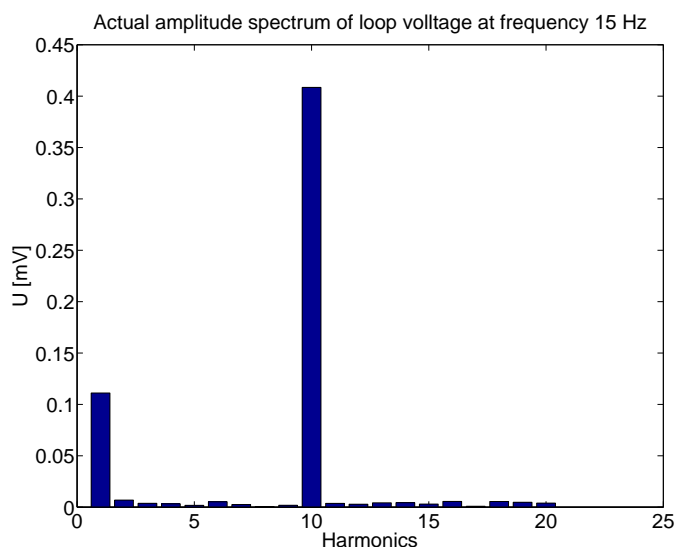
1. Především je třeba zkusmo nastavovat počet průměrovaných vzorků.
2. Bez dalších opatření se rozsah vyšetřované časové oblasti zkrátí o počet vzorků. Tomu lze zabránit posunutím získaných hodnot. Není to však jednoduché.
3. Klouzavým průměrem se také zkreslí hledaný průběh. Stává se více plochým, detaily jsou méně zřetelné. Čím větší počet vzorků se použije, tím je zkreslení větší.

I když jsme v počáteční fázi klouzavý průměr používali, nakonec jsme přešli k metodě Fourierovy transformace, která se v systému MATLAB navíc aplikuje velmi jednoduše. Pouze je nutno vzít v úvahu, že v komplexním výstupním spektru má stejnosměrná složka index 1 a první harmonická index 2. Jako příklad uvedeme odstranění šumu pro poměrně malé indukované napětí při nízké frekvenci 15 Hz. Nejdůležitější část (z hlediska podstatné informace) jeho amplitudového spektra je na obr. 5.1.5.

Ve spektru na obr. 5.1.5 je dominantní devátá harmonická, poněvadž je zpracováno přesně devět period. Výrazná je též stejnosměrná složka (o indexu 1). Maximální harmonická a stejnosměrná složka slouží k rekonstrukci měřeného průběhu. Výsledek je na obr. 5.1.6. Složka napětí o frekvenci 15 Hz spolehlivě odpovídá naměřenému průběhu.

Naměřený průběh je silně zašuměn. Šumové složky nejsou v amplitudovém spektru na obr. 5.1.5 zřetelné, poněvadž jsou jednak slabé, jednak mají zpravidla podstatně vyšší frekvence. Pokud frekvenční oblast rozšíříme a šumové složky zdůrazníme, jak je tomu na obr. 5.1.7, zjišťujeme, že nemůžeme přesně identifikovat polohu maximální harmonické. Tento obrázek potvrzuje, že šum a rušení jsou všudypřítomné. Ke zvýraznění šumu byly stejnosměrná složka a maximální amplituda sníženy dvacetkrát. Ostatní harmonické jsou beze změny. To se nakonec pozná i ze stupnice na svislé ose, porovnáme-li obr. 5.1.5 a 5.1.7.

Tato metoda současně redukuje i rušivé signály, poněvadž ve spektru, jako např. na obr. 5.1.5, vynuluje všechny rušivé harmonické a ponechá jen ty užitečné, v našem případě devátou harmonickou a stejnosměrnou složku. Spektrální složky užitečného signálu a rušení však musí být odlišné. Musí se lišit alespoň o jednu harmonickou.

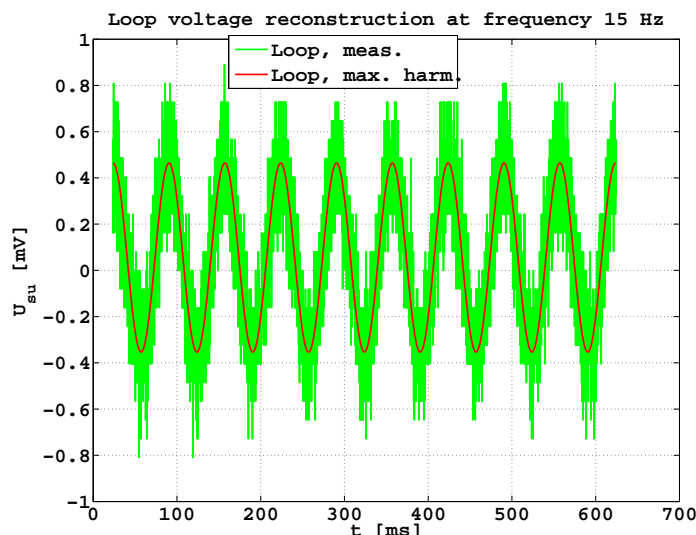


Obrázek 5.1.5: Amplitudové spektrum reálného signálu — klíčové informace

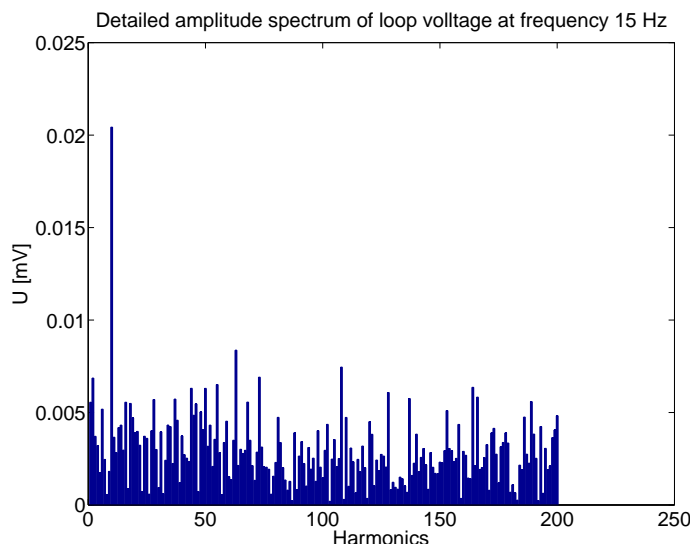
Tato selektivní filtrace však narazí na potíže, pokud jde o rušení od energetické sítě. Toto rušení se může, při souhlasu frekvencí, přičíst k užitečným harmonickým vyšetřovaného průběhu. Abychom se vyhnuli silnému rušení z této sítě, volili jsme frekvence budícího proudu tak, aby nebyly blízkým násobkem frekvence 50 Hz. Zpravidla jsme použili logaritmickou řadu 15, 45, 135, 405 a 1200 Hz.

5.2 Výpočet a prezentace skinefektu

Důležitý je pro další výpočty skinefekt v tyči obdélníkového průřezu. Po programátorské stránce se jedná jen o výpočet komplexní funkce dvou proměnných, což lze v systému



Obrázek 5.1.6: Rekonstrukce časového průběhu



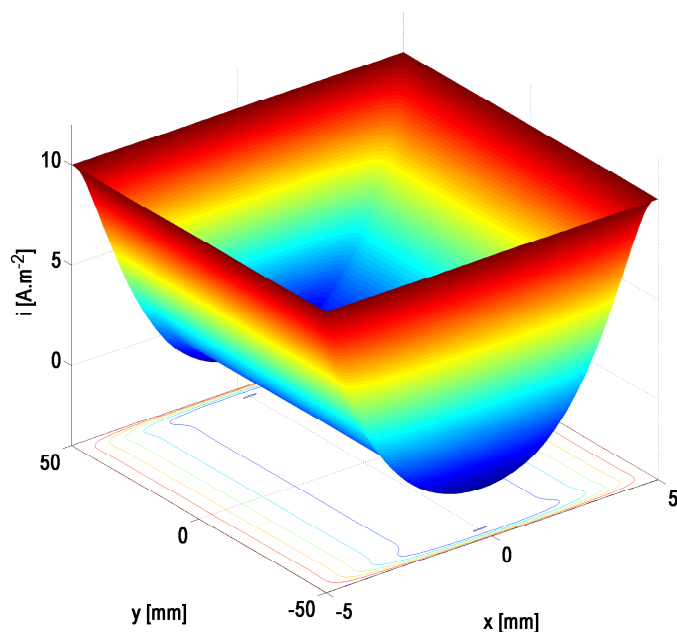
Obrázek 5.1.7: Amplitudové spektrum reálného signálu v širší frekvenční oblasti

MATLAB provést velmi snadno. Pro získání dobré představy o průběhu elektromagnetických veličin v tyči je však nutná jasná a kvalitní grafická prezentace výsledků. Poněvadž se jedná o dvě nezávisle proměnné, možnosti jsou relativně omezené. MATLAB nabízí dvě jednoduchá a typická zobrazení:

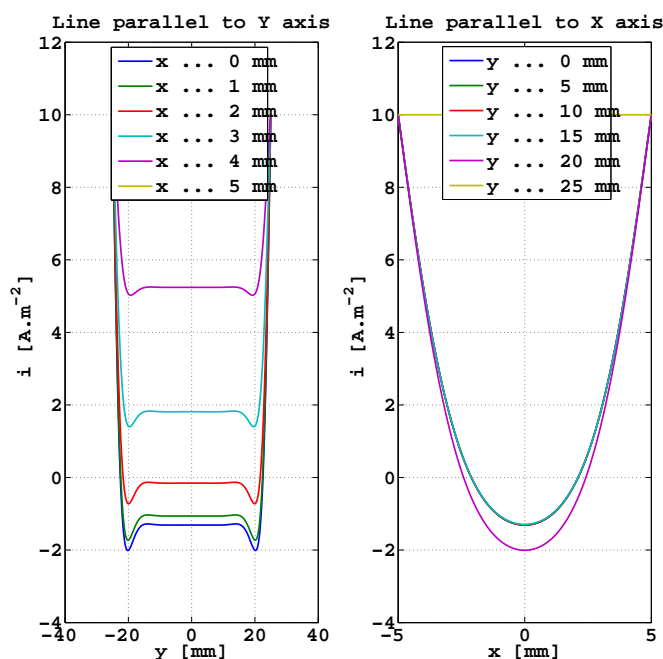
1. Plošný graf, 2D zobrazení. Nezávisle proměnné x, y jsou v rovině. V prostoru, jako třetí souřadnice z jsou hodnoty závisle proměnné, které generují plochu.
2. Parametrický graf, 1D zobrazení. Volí se několik typických hodnot jedné z proměnných, která je parametrem. Pro ně se vypočítají průběhy pro jemné rozdělení druhé nezávisle proměnné. Všechny průběhy se pak zobrazí a v grafu se uvedou též hodnoty parametru.

Jako příklad uvedeme průběh reálné složky proudové hustoty v měděné tyči rozměrů $2a = 10$ mm a $2b = 50$ mm při frekvenci 1 kHz. Tyčí protéká proud o povrchové proudové hustotě $i_o = 10$ A. Při výpočtu jsou osy orientovány takto. Osa X je ve směru šířky $2a$, osa Y směřuje podél výšky $2b$. Obě osy pochopitelně procházejí středem souměrnosti tyče.

Na obr. 5.2.1 je plošný graf pro reálnou složku proudové hustoty. Oba možné parametrické grafy jsou pak na obr. 5.2.2.



Obrázek 5.2.1: Průběh reálné složky proudové hustoty — plošný graf



Obrázek 5.2.2: Průběh reálné složky proudové hustoty — parametrický graf

Z obr. 5.2.1 a 5.2.2 si můžeme učinit představu o významu jednotlivých grafů. Plošný graf umožní celkovou kvalitativní představu. Velkou výhodou je to, že s ním můžeme libovolně otáčet, a při troše zkušenosti a představivosti, lze takto získat zajímavé informace. Z obr. 5.2.1 ve standardní poloze je zřejmé, že maxima proudové hustoty jsou blízko povrchu vodiče

a uvnitř něho je rozsáhlé, poměrně ploché, minimum podél osy Y . Žádné kvantitativní informace však nezískáme.

Kvantitativní informace získáme z parametrického grafu, jehož příklad je na obr. 5.2.2. V levé části jsou hodnoty proudové hustoty na úsečkách rovnoběžných s osou Y a rovnoměrně rozložených s krokem 1 mm. Proudová hustota prudce klesá v blízkosti povrchu, pak zakmitne a dále se drží na zhruba konstantní hodnotě. Čím je úsečka blíže středu vodiče, tím je toto minimum nižší. V okolí středu vodiče (asi 2 mm od jeho osy Y) teče proud opačným směrem, jak jsme již dříve několikrát zmínili.

V pravé části obr. 5.2.2 je průběh proudové hustoty na úsečkách rovnoběžných s osou X . Opět jsme volili jejich rovnoměrné rozdělení s krokem 5 mm. Tato volba ale nebyla šťastná, ze šesti možných průběhů máme jen tři, ostatní splývají. S přihlédnutím k obrázku na levé straně je zřejmé, že vhodnější by bylo volit úsečky nerovnoměrně a v blízkosti povrchu. Nicméně, i tak je vidět, že proudová hustota ubývá směrem k ose vodiče monotonně. Ve střední části vodiče, asi od $x = -2$ mm do $x = 2$ mm, teče proud opačným směrem.

5.3 Výpočet magnetické indukce

Magnetická indukce vně masivního vodiče se počítá numerickou integrací, která může být v případě velkého objemu časově náročná. Proto je nutno hledat cesty, jak ji urychlit. Následným problémem je najít způsob, aby vypočtený průběh byl prezentován názorně a přitom přesně. Tyto otázky řeší následující části.

5.3.1 Numerická integrace

Zde se nám jedná o výpočet magnetického pole vně vodiče, takže je nutno použít Biot-Savartova zákona, viz část 3.8.1. Předpokládáme vodič pravoúhlého průřezu šířky $2a$ ve směru osy X , výšky $2b$ podél osy Y a délky $2L$ ve směru osy Z . Protéká jím pr proud o proudové hustotě $i_o(x_o, y_o)$ ve směru osy Z . Pro tuto úlohu jsme získali vztah (3.8.28). Pro výpočet je nutno použít numerickou integraci. Dvojnásobný integrál (3.8.28) přechází na dvojnásobnou sumu

$$\begin{aligned}
 B_x(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_{xo}} \sum_{j=1}^{N_{yo}} i_o(x_i, y_j) \frac{y - y_j}{(x - x_i)^2 + (y - y_j)^2} \\
 &\quad \left[\frac{z - L}{\sqrt{(z - L)^2 + K_{xy}}} - \frac{z + L}{\sqrt{(z + L)^2 + K_{xy}}} \right] \Delta x_o \Delta y_o, \\
 B_y(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_{yx}} \sum_{j=1}^{N_{yo}} i_o(x_i, y_j) \frac{x - x_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_j)^2} \\
 &\quad \left[\frac{z - L}{\sqrt{(z - L)^2 + K_{xy}}} - \frac{z + L}{\sqrt{(z + L)^2 + K_{xy}}} \right] \Delta x_o \Delta y_o, \\
 B_z(x, y, z) &= 0,
 \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

kde použité symboly jsou definovány takto

$$\begin{aligned}
 K_{xy} &= (x - x_i)^2 + (y - y_j)^2, \\
 x_i &= -a + (i - 1)\Delta x_o, \quad y_j = -b + (j - 1)\Delta y_o, \\
 \Delta x_o &= \frac{2a}{N_x}, \quad \Delta y_o = \frac{2b}{N_y}.
 \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Tabulka 5.3.1: Parametry numerické integrace

Parametr	Symbol	Dílků	Délka	Symbol	Element
Šířka	N_{xo}	5	10 mm	Δx_o	2 mm
Výška	N_{yo}	25	50 mm	Δy_o	2 mm
Délka	N_{zo}	500	2 m	Δz_o	4 mm

Jediným volitelným parametrem je počet dílků N_{xo} , které se použijí k sumaci na šířce $2a$ a počet dílků N_{yo} pro sčítání na výšce $2b$.

Pokud vyjdeme z obecného výrazu (3.8.1) (ve vektorovém tvaru) pro výpočet magnetické indukce, je nutno použít trojitou sumaci. Integrální vztahy pro jednotlivé složky zde pro úsporu místa neuvádíme. Pak ovšem nejsme omezeni na přímý vodič, ale výpočet se výrazně zpomalí. Pro přímý vodič by se při trojnásobné sumaci použily vztahy (3.8.2). Na ně se odkazuje v následujícím textu.

5.3.2 Porovnání obou metod

Za účelem porovnání uvedeme výsledky a časovou náročnost pro obě metody, dvojnásobnou a trojnásobnou sumaci. Vodič měl rozměry $2a = 10$ mm a $2b = 50$ mm. Protékal jím stejnosměrný proud 1000 A. Výpočet magnetické indukce byl jednak čistě numerický s trojnásobnou sumací, jednak využíval analytického výrazu v (5.3.1) a sumace byla dvojnásobná. Počty dílků použité při numerické integraci v obou případech jsou v tabulce 5.3.1. Symboly jsou stejné jako ve vztahu (5.3.1). Kromě počtu dílků jsou v tabulce 5.3.1 uvedeny i odpovídající rozměry a velikost dílku při numerické integraci. Velikost dílku (poslední sloupec tabulky) je poměrně velká. To je vyvoláno tím, aby trojrozměrná numerická integrace byla časově únosná.

Porovnání výsledků pro složku B_x je na obr. 5.3.1. Magnetická indukce se počítá na úsečce rovnoběžné s osou X , ležící v rovině symetrie $z = 0$ a ve vzdálenosti $y = 1,1b = 27,5$ mm. Je tedy 2,5 mm nad horním okrajem vodiče. Stupnice pro vodorovnou osu grafu je logaritmická, jelikož se jedná o větší rozsah. Shoda mezi oběma metodami je dobrá. Malá odchylka blízko roviny souměrnosti vodiče je asi způsobena nedostatečným počtem elementů při čistě numerické integraci. Pro složku B_y na obr. 5.3.2 je shoda ještě lepší. To dokazuje, že algoritmus je správně naprogramovaný a lze jej používat při rutinních výpočtech.

Zrychlení výpočtu s využitím analytického vztahu je téměř 3000 násobné, jak vyplývá z upraveného výpisu běhu programu, který následuje. Nejdůležitější údaj, naměřené urychlení, je na posledním řádku.

Start: 22:19:44

Numericky vypocet ... bodu 100

```
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40
41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60
61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100
```

Doba vypoctu 61.920 sek

Analytický výpočet ... bodu 100

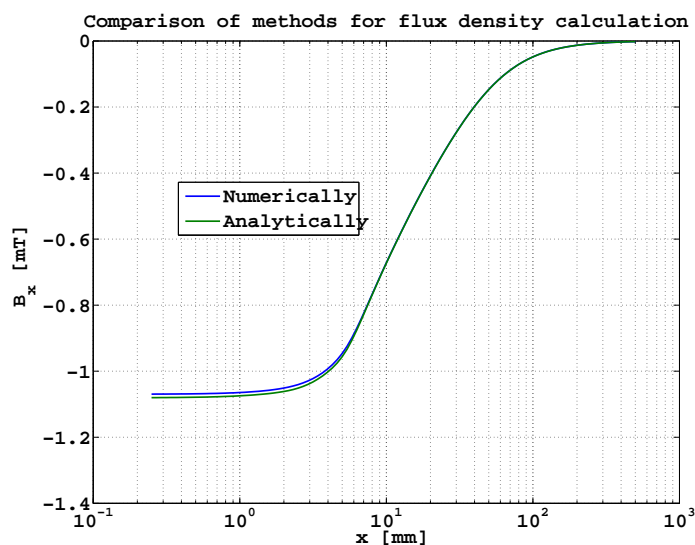
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40
41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60
61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

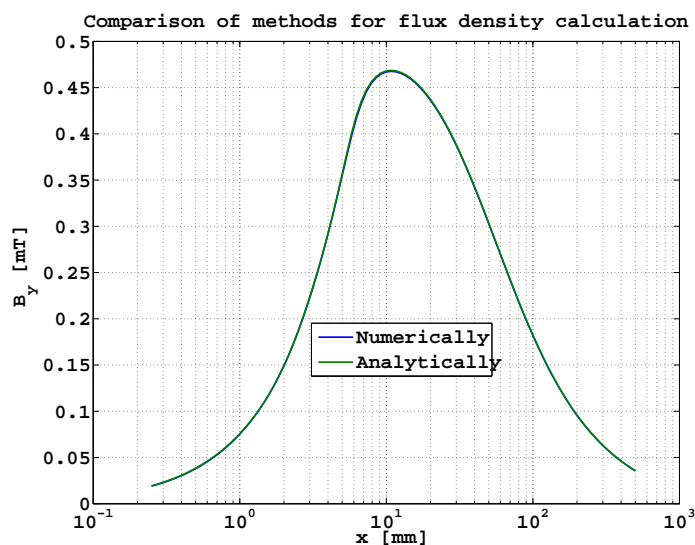
```

Doba výpočtu 0.021 sek

Zrychlení výpočtu: 2890



Obrázek 5.3.1: Porovnání metod pro výpočet magnetické indukce pro složku X — průběh podél osy X



Obrázek 5.3.2: Porovnání metod pro výpočet magnetické indukce pro složku Y — průběh podél osy X

Takto rozsáhlý výpis do pracovního okna MATLABu se používá zejména z toho důvodu, aby byl uživatel informován, zda výpočet vůbec probíhá a ve které fázi zrovna je. Má smysl

jen při delších výpočtech. Zrychlení výpočtu při použití analytického výrazu ve vztahu (5.3.1) je velmi zřetelné. Podle tabulky 5.3.1 bychom očekávali zrychlení nejméně 500 krát, poněvadž odpadne sumace podle největšího počtu elementů. I když toto urychlení pro jednotlivé případy kolísá, je obvykle kolem 2500. Díky této okolnosti bylo možno provádět velký počet numerických simulací.

5.3.3 Presentace výsledků

Magnetická indukce tvoří vektorové pole, proto jsou možnosti jeho prezentace a simulace větší. Základní možnosti jsou shrnuty v tomto přehledu.

1. Grafy pro jednotlivé složky. Poněvadž to jsou skaláry, lze je zobrazit parametrickým nebo plošným grafem.
2. Vektorové pole v rovině.
3. Průběh indukčních čar.

O zobrazení jednotlivých složek jsme již pojednali v části 5.2. V této práci dáváme přednost parametrickým grafům.

Vektorové pole v rovině dává velmi názornou představu a vypočte se poměrně rychle. Ilustrativní jsou zejména animace, které jsou umístěny na přiloženém CD. Příklad vektorového pole byl uveden např. v části 3.10. V kapitole Výsledky jej několikrát použijeme. V principu je možné vytvářet i trojrozměrné vektorové pole, nejeví se však zrovna jako přehledné. Naštěstí v případě přímého vodiče je pole vždy dvourozměrné, tj. jeho indukční čáry leží v jedné rovině kolmé k ose vodiče.

Použití indukčních čar je velmi názorné. Indukční čára je definována tak, že vektor magnetické indukce tvoří její tečnu. U přímého vodiče je opět ta výhoda, že indukční čáry leží v jedné rovině kolmé k ose vodiče. Algoritmus není v principu složitý a byl použit v jiné práci [22]. Problém však dělá realizace. Tečna znamená numerickou derivaci a ta je vždy zatížena velkou chybou. Musí se proto volit velmi malé přírůstky, jinak se setkáme s tím, že se počátek a konec indukční čáry nespojí a místo uzavřené křivky dostaneme spirálu. Příklady jsou v práci [22]. Volba přírůstků a počtu bodů je založena na metodě pokusů a omylů, takže je časově náročná i při rychlém výpočtu. Proto jsme tuto možnost dále nerozvíjeli.

Kapitola 6

Simulace

Z teoretické části jsme zjistili, že analytický vztah pro skinefekt, v případě tyče pravoúhlého profilu, je přibližný. Pro vířivé proudy analytický vztah nelze nalézt vůbec. Stejně tak jsme ukázali, že výpočet magnetického pole vně přímého vodiče je kombinací numerické integrace a analytického řešení, pokud je známo rozložení proudu ve vodiči. V případě skinefektu je známo a magnetické pole lze vypočítat. To je pro případ, kdy můžeme vodič s praktickou přesností pokládat za osamocený. V případě, že vířivé proudy nejsou zanedbatelné, nemáme analytický vztah pro jejich rozložení ve vodiči a tato metoda selhává. Tak je tomu i v jednoduchém případě, že v blízkosti vodiče protéká časově proměnným proudem je jiné masivní vodivé těleso. Tento případ lze řešit pouze přibližně tak, že vliv vířivých proudů na celkové rozložení proudu ve vodiči odhadneme, tj. použijeme výsledků z modelu se značně zjednodušenou geometrií. V případě tyče pravoúhlého průřezu lze použít jako model vířivé proudy ve vrstvě.

Pokud chceme provést podrobnější analýzu elektromagnetického pole se započtením vlivu vířivých proudů, je nutno se vrátit k formulaci pomocí diferenciálních rovnic. Tato diferenciální úloha ale nemá analytické řešení a přibližné řešení se hledá pomocí velmi populární metody konečných prvků (MKP).

V této kapitole budeme MKP aplikovat s cílem získat podrobnější a doplňkové informace, které analytické řešení a numerická integrace nemohou poskytnout. MKP budeme aplikovat pomocí softwaru COMSOL Multiphysics. Tento software se velmi pohodlně ovládá pomocí grafického rozhraní. To ale na druhé straně nese nebezpečí vážných chyb ve výsledcích, protože se jakýkoliv z mnoha parametrů může snadno při formulaci úlohy přehlédnout. Rovněž tak je nutná podrobná znalost problematiky po matematické i fyzikální stránce. V neposlední řadě k systému COMSOL byl omezený přístup. Proto je nutno dále uvedené výsledky získané pomocí MKP chápat jako orientační. Zpravidla je ani podrobně nediskutujeme.

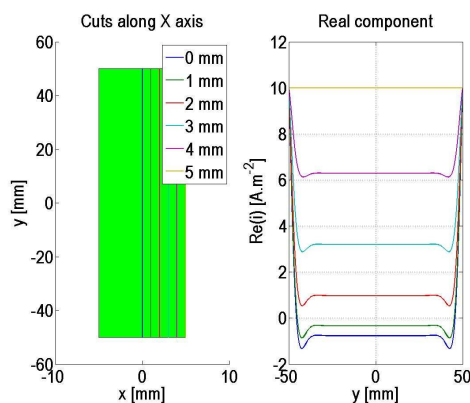
Nejprve porovnáme analytické řešení pro skinefekt v osamoceném vodiči a jeho ovlivnění vířivými proudy tekoucími v sousedním rovnoběžném vodiči. Druhý případ se zahrnutím vířivých proudů se musí zjišťovat aplikací MKP. Dále uvedeme řešení magnetického pole experimentálního modelu jednoduché trojfázové rozvodné soustavy pro případ, že vířivé proudy lze zanedbat. Nakonec pomocí MKP se budeme zabývat úplným řešením složitější, prakticky používané rozvodny. Vedlejším cílem této kapitoly je ukázat některé netradiční metody prezentace výsledků.

6.1 Skinefekt a vliv vířivých proudů

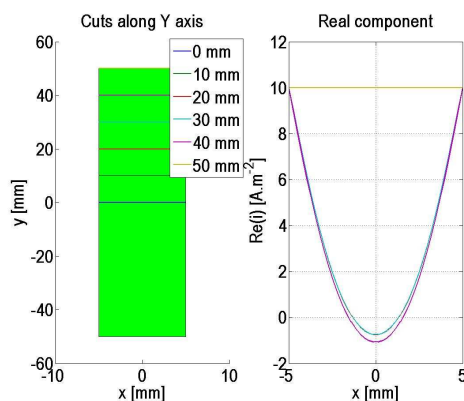
Při výpočtu v softwaru Matlab se uvažovala volitelná šířka a výška vodiče. V našem případě jsme volili šířku $2a = 10$ mm a výšku vodiče $2b = 100$ mm. Zdroj harmonického napětí

pracuje při frekvenci 50 Hz. Proudová hustota u povrchu je zvolena $i_o = 0.1 \text{ A/mm}^2$. Rovněž předpokládáme časově harmonický ustálený stav v časovém okamžiku $t = 0$. Na obrázku 6.1.1 jsou vyobrazeny průběhy reálné složky proudové hustoty v řezech rovnoběžných s osou Y v různých vzdálenostech od osy X . Tyto řezy jsou uvedeny v levé části obrázku současně s jejich polohou.

Analogicky jsou na obrázku 6.1.2 uvedeny průběhy reálné složky proudové hustoty v řezech rovnoběžných s osou X v různých vzdálenostech od osy Y . Většina průběhů podél osy X je si velice podobná. To je zapříčiněno kratším rozměrem vodiče (šířka je desetkrát menší než výška), takže nedochází k tak velkému ovlivnění proudové hustoty skin efektem.



Obrázek 6.1.1: Reálná složka proudové hustoty ve směru svislé osy v některých řezech tyče



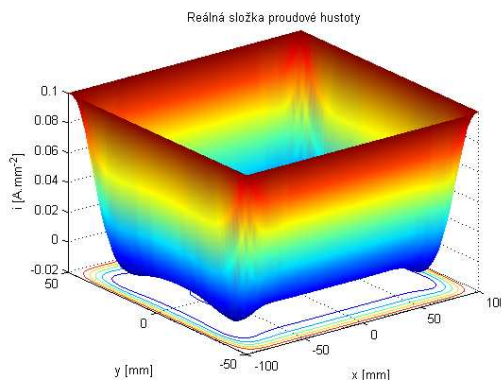
Obrázek 6.1.2: Reálná složka proudové hustoty ve směru vodorovné osy v některých řezech tyče

Jako druhou možnost, vedle parametrických křivek, pro úplnost uvedeme i plošný graf na obrázku 6.1.3 pro reálnou složku proudové hustoty, ale pro jiný průřez vodiče 200 x 100 mm.

Nyní přejdeme k modelování vlivu vířivých proudů. Uvažujeme nejjednodušší praktický případ v experimentálním modelu, kdy středním vodičem prochází proud a krajní vodiče nejsou zapojeny¹.

V modelu předpokládáme, že rovnoběžně s aktivním vodičem je další (pasivní) vodič stejných rozměrů, který není připojen ke zdroji napětí. Nicméně se v něm indukují vířivé

¹Ve skutečnosti jimi prochází poloviční zpětný proud, ale to by bylo na základní model již příliš složité.



Obrázek 6.1.3: Reálná složka proudové hustoty

proudy. V teoretické části jsme vysvětlili, že obecně pod pojmem vířivých proudů si představujeme indukovaný proud ve vodiči způsobený vnějším časově proměnným magnetickým polem. Zdrojem tohoto magnetického pole je v našem případě časově proměnný proud v aktivním (prvním) vodiči. Ten vytváří magnetické pole, které indukuje vířivé proudy v pasivním vodiči. Vzniklé vířivé proudy svým magnetickým polem zpět ovlivňují zdroj magnetického pole, kterým je v našem případě aktivní vodič, jímž protéká vnucený proud. Snaží se snížit rychlost jeho časové změny, působí proti němu. Navíc toto magnetické pole buzené vířivými proudy z pasivního vodiče vytváří vířivé proudy v aktivním vodiči. Ty budí své magnetické pole, které vytváří další vířivé proudy v pasivním vodiči atd. To se po zapnutí zdroje opakuje tak dlouho, dokud se nevytvoří ustálený stav.

Z výše uvedeného popisu je zřejmé, že systém dvou vodičů je již příliš komplikovaný na to, aby mohl být odvozen analytický vztah pro vířivé proudy v aktivním a pasivním vodiči. V aktivním vodiči se jedná o superpozici známé proudové hustoty vyvolané skinefektem a proudové hustoty vířivých proudů. Proto se tuto úlohu pokusíme řešit s využitím MKP.

Jako numerický příklad uvažujeme dva vodiče s příčným průřezem 10×40 mm, a odlišnou vzdáleností mezi sebou: těsně u sebe, ve vzdálenosti 40 mm a 80 mm od sebe. Vzdálenost 40 mm byla typická rozteč mezi vodiči v experimentálním modelu, rozteč 80 mm se blíží maximální nastavitelné rozteči. Levý vodič je vždy napájen proudem $I = 1500$ A při frekvenci 50 Hz, což je v experimentálním modelu proud při nejnižších frekvencích. Druhý vodič je zapojen naprázdno. Postup řešení v systému COMSOL Multiphysics zde neuvádíme², ale uvedeme typické výsledky.

Na obrázcích 6.1.4 a 6.1.5 jsou vyobrazené výsledky ze simulací pro libovolný časový okamžik pro případ, že vodiče jsou těsně vedle sebe. Na typickém výstupu MKP, obr. 6.1.4, je rozložení proudové hustoty pomocí barevné mapy. Vzhledem k malým rozměrům vodičů je informací poměrně málo. Důležitá je symetrie kolem vodorovné osy a volba řezů pro parametrické křivky. Ty jsou ve vzdálenostech³ $y = 40$ mm, $y = 35$ mm, $y = 30$ mm, $y = 25$ mm a $y = 20$ mm nad rovinou souměrnosti $y = 0$. Zobrazené přímky, pro které požadujeme parametrické vyjádření, jsou zde znázorněny červeně. Volili jsme 5 přímků na jedné polovině vodiče, jelikož úloha je symetrická.

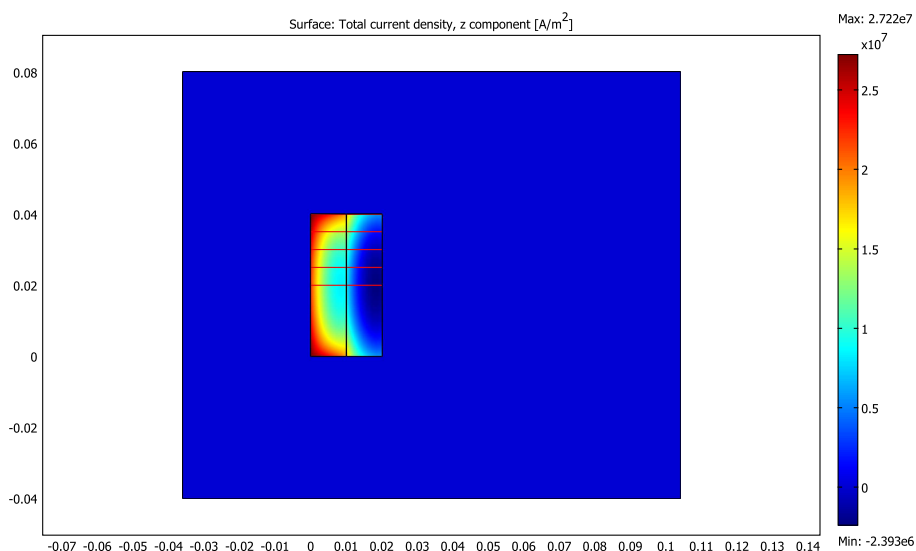
Na obr. 6.1.5 je první případ parametrických křivek pro vodiče v těsné blízkosti. Je zde vidět maximální uplatnění vířivých proudů, které se indukují v pravém vodiči. Můžeme si rovněž povšimnout, že malý indukovaný proud uprostřed a pravé polovině tohoto vodiče teče opačným směrem. Kvalitativně tento průběh odpovídá vířivým proudům ve vrstvě, které

²Využíváme grafické rozhraní tohoto systému.

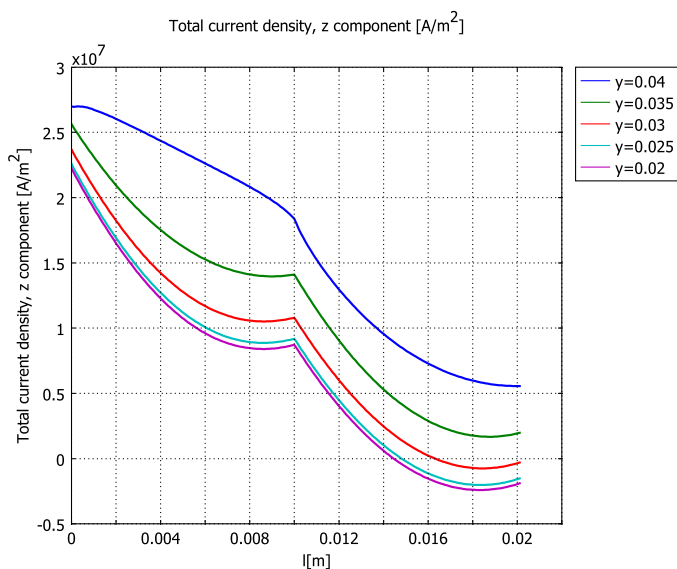
³Systém COMSOL Multiphysics udává rozměry v metrech

jsme analyzovali v části 3.5.2. Tyto indukované proudy zpětně působí na primární proud v aktivním vodiči. Můžeme si představit, že v aktivním vodiči je jejich hustota zrcadlově souměrná vzhledem k rozhraní, má však nižší amplitudu. V přilehlé části vodičů tedy snižují její hodnoty určené pouze skinefektem a vedou k tomu, že proudová hustota je rozložena silně nesymetricky v porovnání s obr. 6.1.2 pro osamocený vodič.

Při tomto vysvětlení jsme pro jednoduchost nesledovali znaménko, tedy směr vířivých proudů. Průběhy na obr. 6.1.5 jsou pro budící proud v okamžiku krátce po průchodu nulou.



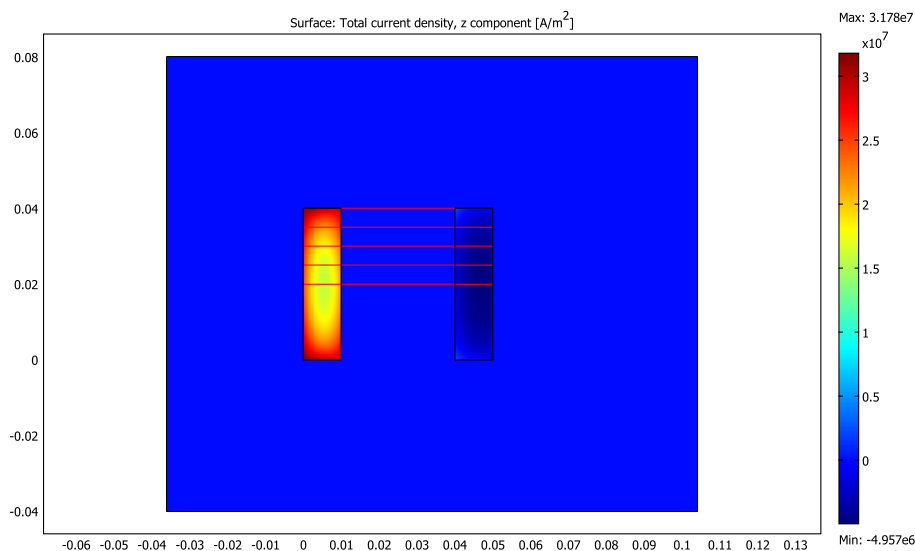
Obrázek 6.1.4: Vliv vířivých proudů pro vodiče v těsné blízkosti — rozložení proudové hustoty



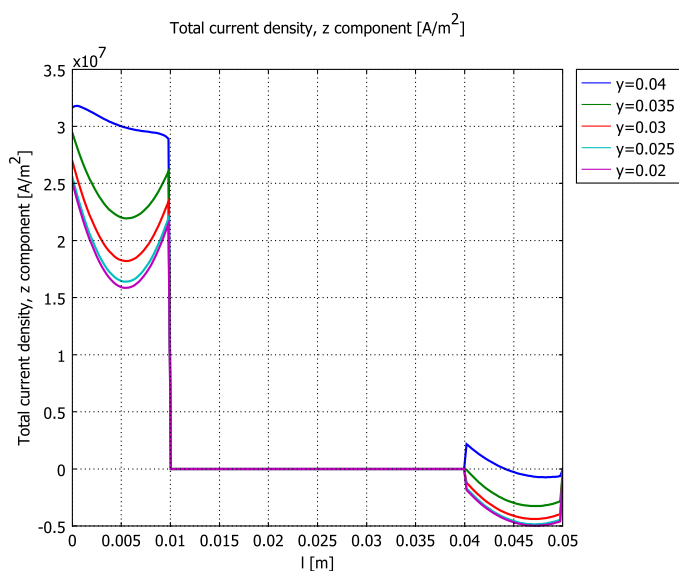
Obrázek 6.1.5: Vliv vířivých proudů pro vodiče v těsné blízkosti — parametrické vyjádření proudové hustoty

U druhého případu 6.1.6 jsme uvažovali rozteč vodičů vůči sobě 40 mm, což byla standardní rozteč v experimentu. Tuto barevnou mapu uvádíme jen pro představu o geometrii

úlohy. Rozměry vodičů jsou malé, informace v ní jsou použitelné jen pro fyzikální představu. Důležitější jsou opět parametrické křivky na obr. 6.1.7. Vířivé proudy se zde uplatňují podstatně méně. V tomto případě převážná část proudové hustoty indukované v pasivním vodiči má opačný směr a jeho absolutní hodnota je nižší. Průběh proudové hustoty v aktivním vodiči je pořád nesymetrický, ale podstatně méně v porovnání s případem, kdy jsou vodiče těsně vedle sebe, obr. 6.1.5.



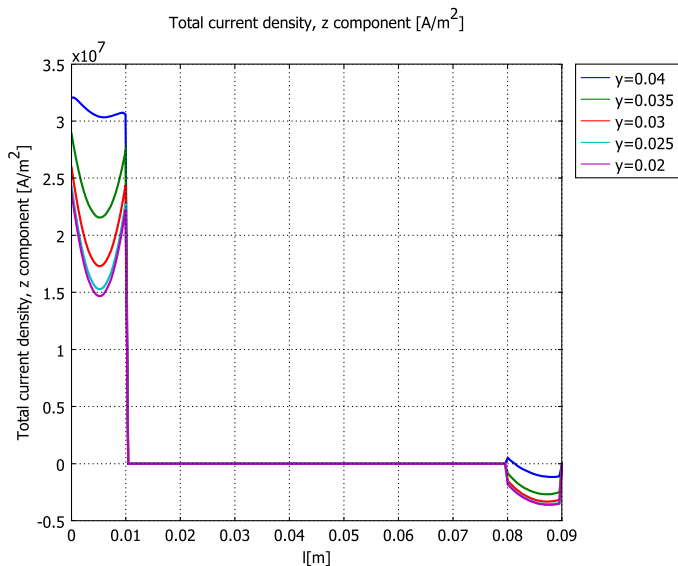
Obrázek 6.1.6: Vliv vířivých proudů pro rozteč vodičů 40 mm — rozložení proudové hustoty



Obrázek 6.1.7: Vliv vířivých proudů pro rozteč vodičů 40 mm – parametrické vyjádření proudové hustoty

U posledního případu, obrázek 6.1.8, uvažujeme rozteč vodičů vůči sobě 80 mm. Vířivé proudy se zde uplatňují ještě méně, než pro předchozí případ na obr. 6.1.7. Rovněž převážná část indukovaných vířivých proudů má opačný směr. Je zde též vidět, že na primárním

proudu se projevuje především skinefekt a ovlivňování vířivými proudy je slabé. Průběhy křivek na obr. 6.1.8 se blíží křivkám pro analytický model na obr. 6.1.2.



Obrázek 6.1.8: Vliv vířivých proudů pro rozteč vodičů 80 mm – parametrické vyjádření proudové hustoty

Z fyzikálního hlediska překvapuje změna směru toku simulovaných indukovaných proudů s rostoucí vzdáleností mezi vodiči. V těsné blízkosti, obr. 6.1.5, tekou souhlasně s budícím proudem, ve střední vzdálenosti, obr. 6.1.7, teče většina proudu opačným směrem a při největší rozteči, obr. 6.1.8, je směr vířivých proudů prakticky opačný.

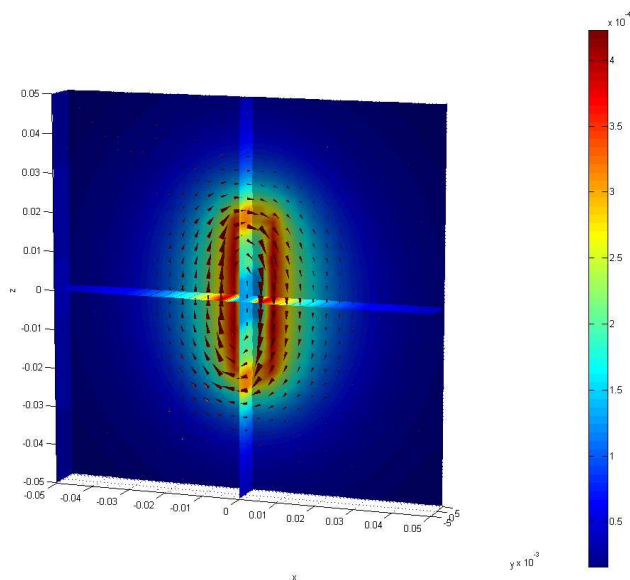
Z praktického hlediska je důležité si uvědomit, že při maximální rozteči mezi vodiči v aparatuře, která je téměř 100 mm, bude vliv vířivých proudů na rozložení proudové hustoty v primárním vodiči slabý, určitě ještě menší než na obr. 6.1.8. V prvním přiblížení bude možno použít pro tento případ analytický model s výsledky podle obr. 6.1.2.

Z čistě teoretického hlediska je dobré si povšimnout, že simulace vedou k výsledku, že proudová hustota v blízkosti povrchu aktivního vodiče je zhruba konstantní, pokud je vliv vířivých proudů zanedbatelný. Zejména to je dobře vidět na obr. 6.1.8, tedy pro největší rozteč. Simulace pomocí MKP by tedy měly podporovat náš předpoklad o konstantní proudové hustotě na povrchu vodiče s pravoúhlým průřezem, který jsme použili při odvození analytického vztahu (3.6.19) pro proudovou hustotu.

6.2 Výpočet magnetického pole

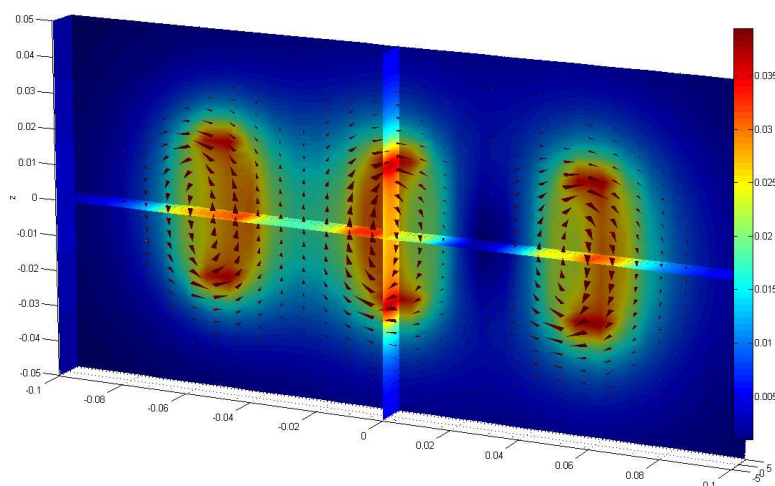
Pokud můžeme zanedbat vířivé proudy a tím pádem i skinefekt, lze pro výpočet magnetického pole použít numerickou integraci. V případě, že chceme přesnější výpočty, je třeba rozdělit vodič na několik tisíc elementů. Ovšem při velkém počtu elementů nám porostou značně nároky na výpočetní výkon. To je nevýhoda této metody. Rovněž si musíme uvědomit, že tento integrál je pro vodič konečné délky. Při krátkém vodiči se výrazně projeví vliv jeho konců. Proto při výpočtu je zapotřebí přizpůsobit parametry vodiče tak, aby vodič byl dostatečně dlouhý. Zdánlivě pro kontrolu výpočtu můžeme využít toho, že magnetické pole klesá se čtvercem vzdálenosti od vodiče. To ale platí až pro velké vzdálenosti, ve srovnání s typickým rozměrem vodiče, v našem případě s jeho délkou. Požadavek velké vzdálenosti obvykle znamená alespoň desetkrát, i když v technické praxi to někdy může být pouze třikrát.

Příklad použití metody numerické integrace pro jeden vodič je na následujícím obrázku 6.2.1. Výpočet je proveden pro šířku vodiče 5 mm a výšku vodiče 50 mm, kterým teče proud 10 A. Obr. 6.2.1 je v poněkud moderním provedení a snaží se ukázat prostorový průběh magnetického pole. Šipky nám ukazují vírové magnetické indukční čáry. Barva pak standardně reprezentuje hodnotu magnetické indukce v daném místě. Je zde snaha i barevně prezentovat průběh pole též v úzkém zvoleném rovinném řezu.



Obrázek 6.2.1: Magnetické pole obdélníkového vodiče

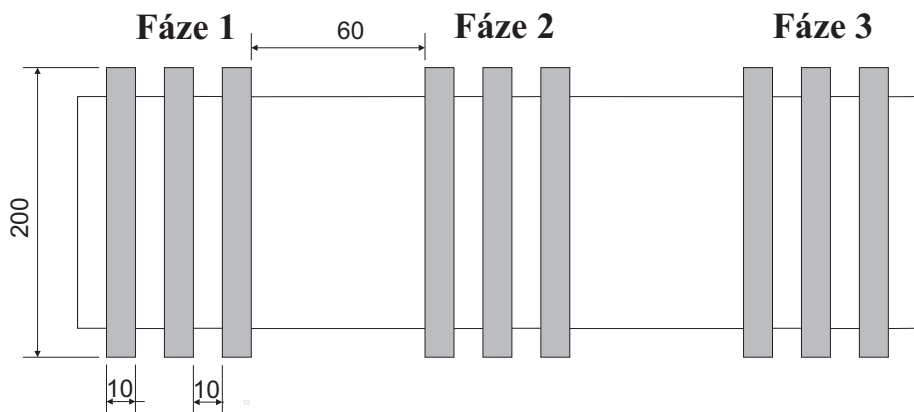
Výsledek téhož výpočtu pro trojfázovou soustavu pomocí stejné metody je na obr. 6.2.2. Můžeme si zde povšimnout nesymetrické rozložení magnetické indukce v porovnání s obr. 6.2.1. Roli zde hraje to, že průběh pro trojfázovou soustavu je posunutým součtem tří jednofázových průběhů. Grafická forma je analogická. Průběh magnetické indukce je ale pro obecný časový okamžik. Podle orientace indukčních čar můžeme soudit, že levým krajním vodičem teče poměrně velký proud z roviny obrázku, prostředním a pravým krajním vodičem pak menší a nestejné proudy opačným směrem.



Obrázek 6.2.2: Magnetické pole třífázové soustavy tvořené obdélníkovými vodiči

6.3 Úplná analýza trojfázové soustavy s vodiči různých profilů

V tomto případě uvažujeme vliv vířivých proudů v trojfázové soustavě. Výpočet je proveden pomocí metody konečných prvků. Poněvadž MKP je nutno aplikovat na konkrétní geometrii, v první aplikaci jsme uvažovali rozložení vodičů v rozvodně podle obr. 6.3.1.



Obrázek 6.3.1: Uspořádání vodičů třífázové soustavy

Důvodem pro toto řešení je zejména omezení skin efektu. Tentýž stejnosměrný proud přeneseme buď jedním vodičem o určitém průřezu, nebo třemi vodiči o třetinovém průřezu⁴. V případě střídavého proudu je tomu jinak. Ve vodičích se uplatní skin efekt a proudová hustota se soustřeďuje v blízkosti jeho povrchu. V případě vodiče o velkém (trojnásobném) průřezu bude velká střední část nevyužita. V případě tří vodičů, každý o třetinovém průřezu, bude naopak téměř celý jejich průřez využit. Z hlediska skin efektu je toto řešení v pořádku. Zůstává otázkou, jak se v této realizaci projeví vliv vířivých proudů. Na to by měla odpovědět simulace pomocí MKP.

Analýza tohoto problému byla provedena prostřednictvím simulačního programu pro soustavu COMSOL Multiphysics a to za následujících standardních podmínek v systému, které zde pro úplnost popíšeme:

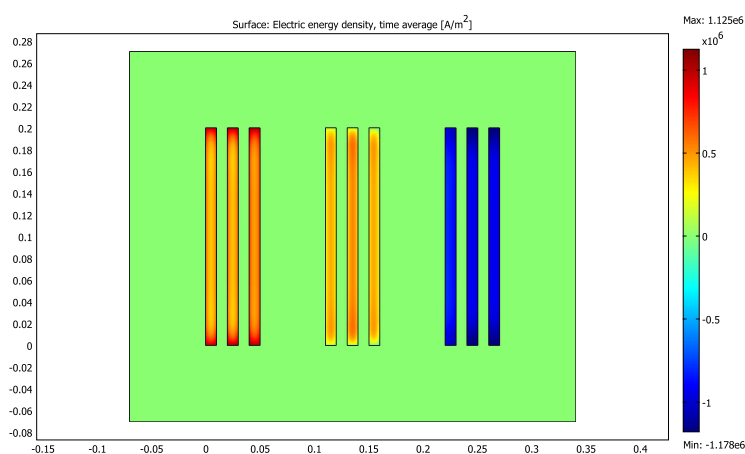
- Sběrnici protéká proud ($I_{max} = 7400\text{A}$) s frekvencí 50 Hz.
- Vzájemný posun jednotlivých fází je 120° .
- Materiál sběrnic je galvanicky čistá měď ($\gamma = 5.998 \cdot 10^7 [\text{S/m}]$).
- Okolní prostředí tvoří vzduch (permeabilitu $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$).
- Uspořádání a rozměry průřezů vodičů jsou vyobrazeny na obrázku 6.3.1. V každé fázi jsou tři vodiče, aby se zvýšil přenášený proud a omezil skin efekt, jak jsme již uvedli.
- Vodiče jsou buzeny sinusovým signálem $I(t) = I_{max} \sin(\omega t + \varphi)$, kde I_{max} je amplituda proudu. Fázový posun φ závisí na pořadí (volbě) fází. Perioda signálu při frekvenci 50 Hz odpovídá 20 ms. První skupinu vodičů zleva, označená Fáze 1 volíme jako počáteční⁵, tedy fázový posun je 0° . Prostřední skupina vodičů označená jako Fáze 2 je posunuta vůči Fázi 1 o 120° . Třetí skupina vodičů označená Fáze 3 je pochopitelně vůči skupině vodičů označená Fáze 1 posunuta o 240° , případně o -120° .

⁴Pokud budeme sledovat též oteplení vodičů, nejsou řešení zcela ekvivalentní.

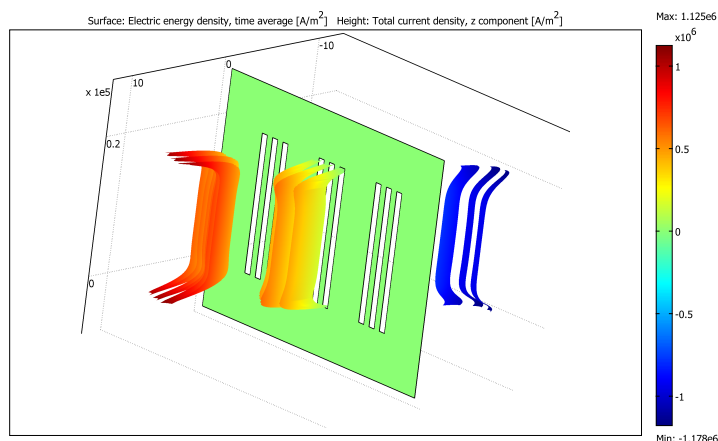
⁵Při numerické integraci měla střední fáze nulovou fázovou konstantu.

Výsledky výpočtu byly ve formě časové simulace s cílem učinit si správnou fyzikální představu o dynamice jevů v tomto systému. Z ní byly vybrány následující obrázky. Barevná mapa pro rozložení proudové hustoty je na obr. 6.3.2. V levé fázi by mělo být podle barvy minimum nebo minimum blízká hodnota. Pak by zbývajících dvěma fázemi měl téci zhruba poloviční proud opačným směrem, tedy by proudové hustoty měly být růžové. Obrázky ale nebyly určeny pro podrobnou analýzu.

Vhodnější je proto plošný graf na obr. 6.3.3. Tato simulace ukazuje, že proud je soustředěn v blízkosti užší stěny vodiče. Zde se jedná pravděpodobně o skin efekt. To by potvrzovaly obr. 6.1.2 a 6.1.1 získané z analytického vztahu. Vířivé proudy by vedly k extrémům podél delší stěny vodičů, což např. ukazuje obr. 6.1.7 nebo 6.1.8. Ten je ale pro jiný, jednodušší případ, kdy vodičem neteče vnucený proud. Je proto nutno vzít v úvahu, že situace při třech fázích je jiná a složitější, než při jedné fázi.



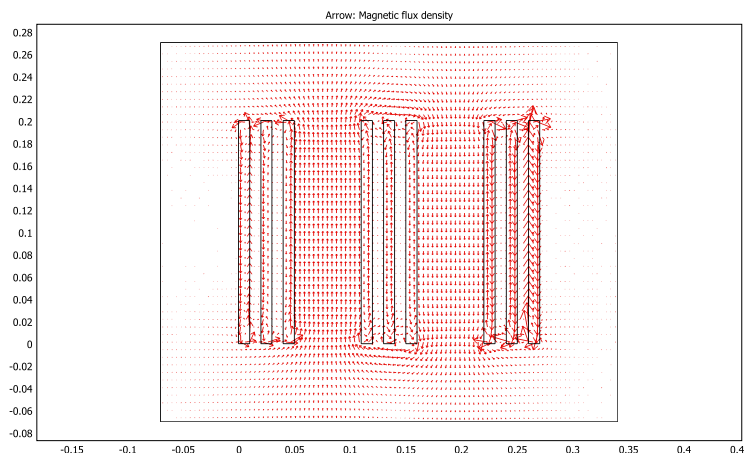
Obrázek 6.3.2: Distribuce proudové hustoty v třífázové soustavě



Obrázek 6.3.3: Distribuce proudové hustoty v třífázové soustavě – 3D prezentace

Průběh indukčních čar v rovině symetrie je na obr. 6.3.4. Ten odpovídá fyzikálním představám. Při zvětšení však nalezneme určité nepřesnosti. Např. indukce napravo od pravé skupiny vodičů by měl být zhruba stejná jako na levé straně. Na obrázku 6.3.4 je ale velmi nízká.

Pomocí MKP jsme dále provedli analýzu vybraných profilů vodičů od firmy Rittal a Erico. Došli jsme k zajímavým výsledkům. Poněvadž si nejsme jisti jejich stoprocentní věrohodností, v této práci je neuvádíme. Některé jsou však v příloze na CD. Stejně jako



Obrázek 6.3.4: Magnetické pole třífázové soustavy

sledování vlivu vířivých proudů pomocí MKP, budou tyto i jiné aplikace předmětem dalšího podrobnějšího studia.

6.4 Zhodnocení metody konečných prvků

Metoda konečných prvků je velmi populárním a účinným nástrojem. Na druhé straně by se neměl její význam přeceňovat. V této práci se snažíme používat jednodušší analytické metody nebo numerickou integraci všude, kde to jde a vede ke spolehlivým výsledkům. Teprve, když tento přístup selhává, nasazujeme MKP. Tak tomu je v této práci při sledování vlivu vířivých proudů, kde se MKP ukázala jako nezbytná. To je důvod, proč jsme jí věnovali tuto kapitulu.

Z dosažených předběžných výsledků je zřejmé, že je to správný směr řešení. Vliv vířivých proudů lze takto modelovat a výsledky získat ve stejné formě, jako u předchozích metod. Na druhé straně nelze přehlížet některé nedostatky. Zejména je to malý počet bodů v oblasti, která nás zajímá, a tím i nedostatek kvantitativních informací. To je problém ryze technický. Stejně tak je technickým problémem nepřesnost v geometrii na výstupech. Závažnějším technickým problémem je to, že na grafických výstupech nejsou informace, pro který případ je tento výstup. V našem případě šlo o časový okamžik či fázi. Buď se tyto klíčové informace musí do výstupu zavést, nebo, pokud to nepůjde, je nutno vést podrobnou a přesnou dokumentaci o výpočtech pomocí MKP.

Fyzikálním problémem je přesnost výstupů. Zejména jde o to, jaké details se dají pomocí MKP ještě zachytit. Příkladem může být např. obrázek 6.1.5. Blízko středu vodiče teče malý proud opačným směrem. To plyne i z analytického průběhu na obr. 6.1.2. Z výstupu MKP však není mj. jasné, zda jde o zakmitávání při skinefektu nebo vliv vířivých proudů. Proto považujeme za nutné začít používání MKP na příkladech, kde je analytické nebo jiné řešení známe a výsledky mezi sebou nejprve porovnat. Ve složitějších případech je nutno porovnání s experimentem. Pokud to nepůjde, je nutno posuzovat, zda řešení není v rozporu s fyzikálními principy. To je také důvod, proč prezentované výsledky považujeme za orientační a předběžné.

Kapitola 7

Výsledky

V této části uvádíme důležité teoretické i experimentální výsledky. Teoretické výsledky se týkají zejména průběhu proudové hustoty v pravoúhlé tyči při různých frekvencích.

Jak již bylo zmíněno v teoretické části, existují dva přístupy. Naše teorie skinefektu je založena na okrajové podmínce, že proudová hustota je na povrchu tyče konstantní. Pracovně ji nazveme teorie konstantního (povrchového) proudu. Podle druhé teorie [9] by se proudová hustota měla měnit i na povrchu. Tu pracovně nazveme teorie proměnného (povrchového) proudu. Grafické porovnání výsledků pro povrchový proud z obou teorií je v další části. Zde jen poznamenejme, že proudová hustota proměnného povrchového proudu podle teorie [9] by se měla měnit na povrchu dosti drasticky.

Jeden ze způsobů, jak ověřit, zda je předpoklad teorie konstantního proudu správný, či rozhodnout, která z teorií je blíže skutečnosti, je změřit proudovou hustotu na povrchu tyče. Ta je však přímo prakticky neměřitelná, proto se musí měřit její účinky. Nejjednodušší je změřit napětí podle povrchu vodiče v různých vzdálenostech od hrany. Pracovně je někdy budeme nazývat povrchové napětí, i když ve fyzice se tento termín týká kapalin. To je též důvod, proč byla část experimentů zaměřena právě tímto směrem.

Proudovou hustotu uvnitř vodiče nelze měřit žádným způsobem. Uvnitř vodiče ale nelze měřit ani další elektromagnetické veličiny, např. magnetickou indukci. Jedna poměrně snadná cesta je usuzovat na rozložení proudové hustoty z průběhu vnějšího magnetického pole. Proto byla provedena rozsáhlá simulace průběhu magnetického pole a jeho důkladné experimentální proměření.

Tato kapitola v podstatě shrnuje základní výsledky z těchto tří nastíněných oblastí. Simulace skinefektu v tyči je jen krátká, zato dvě další oblasti jsou poměrně rozsáhlé. Důležitou částí magnetických měření a simulací je i posouzení shody mezi teorií a experimentem.

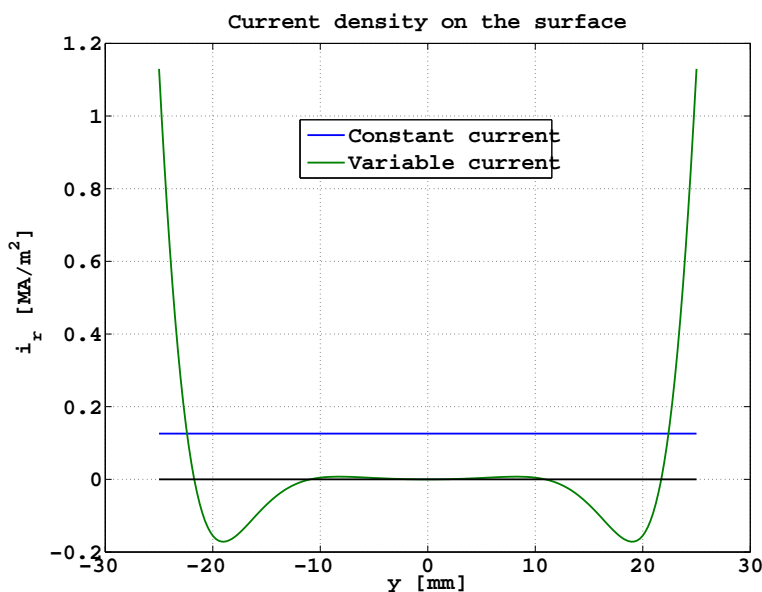
7.1 Povrchová proudová hustota podle dvou teorií

Porovnání povrchové proudové hustoty podél obou teorií pro vodič s obdélníkovým průřezem 10 x 50 mm je na obr. 7.1.1. Průběh se vztahuje ke svislé straně o délce 50 mm.

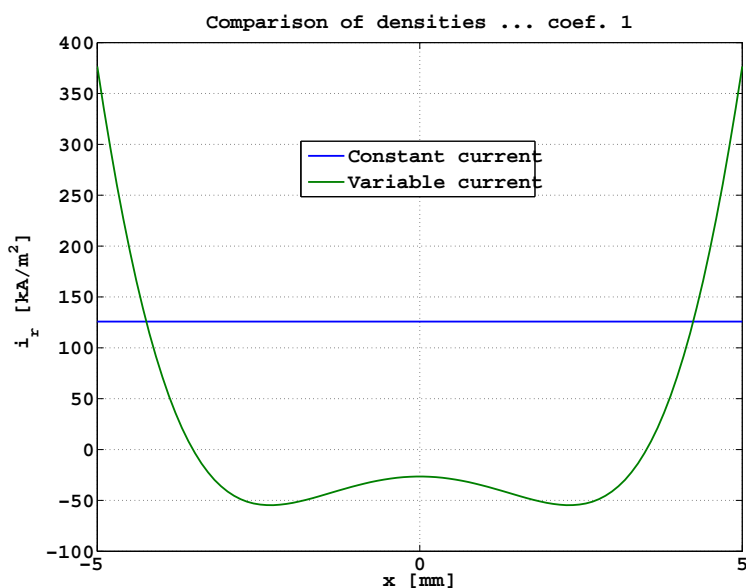
Podle teorie proměnného proudu, obr. 7.1.1, má proudová hustota na povrchu vodiče dosti neobvyklé projevy. Proudová hustota by se měla měnit velmi prudce v blízkosti hrany, v části povrchu by měl proud téci opačným směrem a ve střední části povrchu by prakticky neměl téci vůbec.

Obdobně podivný průběh proudové hustoty lze vypočítat i pro vodorovný povrch tyče. Je na obr. 7.1.2. Proudová hustota opět prudce klesá směrem od hrany a v poměrně rozsáhlé střední části by měl proud téci opačným směrem.

Z porovnání obr. 7.1.1 a 7.1.2 navíc zjistíme, že se proudové hustoty na hraně neshodují. Podle svislé stěny by měla na hraně být proudová hustota kolem 1100 kAm^{-2} , zatímco od



Obrázek 7.1.1: Proudová hustota na svislém povrchu vodiče



Obrázek 7.1.2: Proudová hustota na vodorovném povrchu vodiče

vodorovné stěny by to mělo být kolem 400 kAm^{-2} .

7.2 Proudová hustota v tyči pravoúhlého průřezu

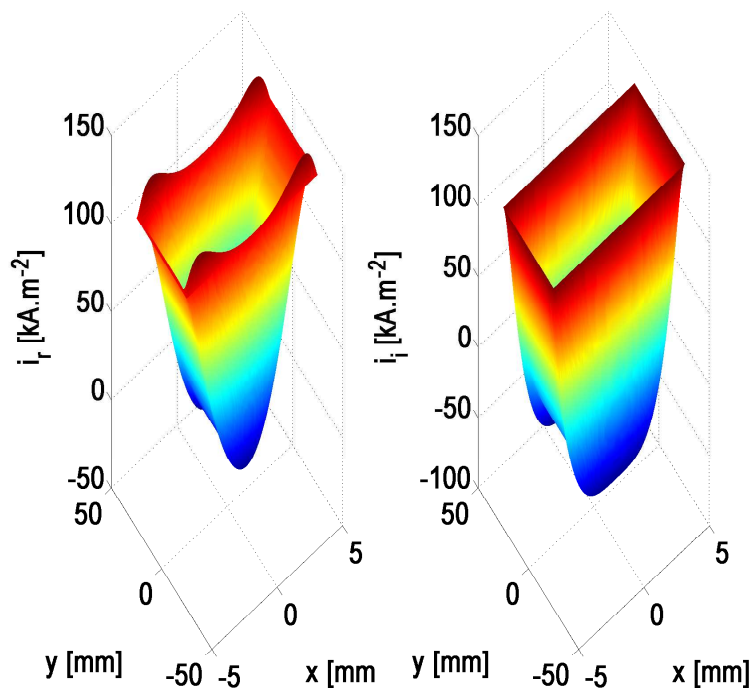
V této části jsou výsledky počítané podle teorií podrobně popsané v kapitole Teorie, část 3.6. Výpočet je pro tyč pravoúhlého průřezu šířky 10 mm ve směru osy X a výšky 50 mm ve směru osy Y , kterou protéká proud 1000 A při frekvenci 1 kHz¹. Jelikož řešení je komplexní,

¹V experimentu byla tato hodnota proudu dosažena při relativně nízké frekvenci, kolem 100 Hz, pro frekvenci 1 kHz to bylo kolem 200 A.

budeme uvádět jednak reálné a imaginární složky, jednak amplitudu a fázi. Dále se budeme zabývat výpočtem proudu a napětí na povrchu vodiče.

7.2.1 Průběh proudové hustoty v tyči pravoúhlého průřezu

Celkový přehled udávají plošné grafy na obr. 7.2.1, kde je reálná a imaginární složka, a obr. 7.2.2, kde jsou amplituda a fáze (ve stupních).



Obrázek 7.2.1: Proudová hustota v tyči — reálná a imaginární složka

Až na reálnou složku, je ze všech grafů na první pohled zřejmé, že proudová hustota a její fáze jsou na povrchu konstantní. Tedy splňují okrajové podmínky konstantní povrchové proudové hustoty. Platí to i pro reálnou složku, ale zde je v těsné blízkosti povrchu lokální maximum. Na 2D grafu je ale tento fakt nezjistitelný, je však zřetelný na parametrických grafech, které jsou uvedeny dále.

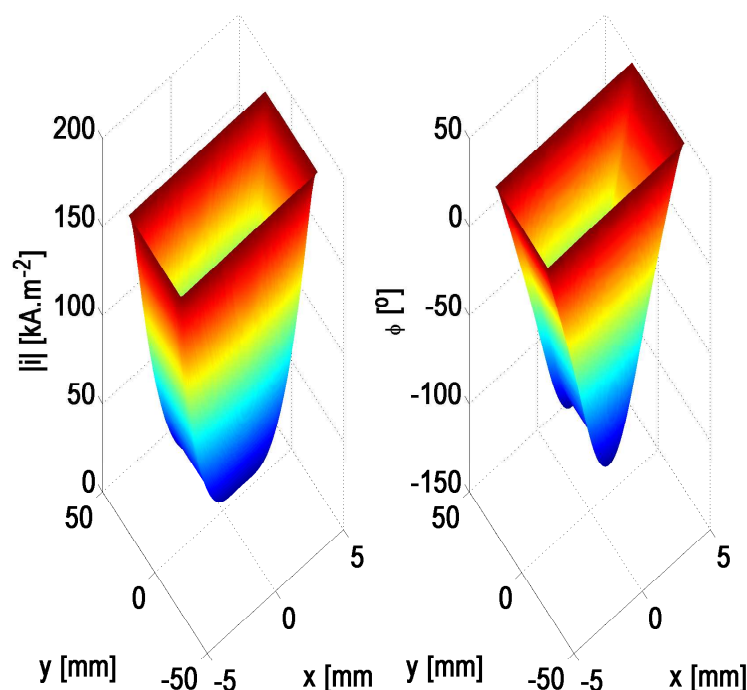
Poznamenejme, že tyto grafy nejsou nezávislé. Fyzikálně je vhodné použít reálnou i_r nebo imaginární i_i složku. Na její volbě nezáleží, jelikož obě jsou navzájem posunuty o fázovou konstantu $\pi/2 = 90^\circ$. Tytéž informace jako v jedné ze složek jsou také v amplitudě $|i|$ a fázi φ . Pouze pro úplnost je odkazujeme na známé vztahy z teorie obvodů

$$\begin{aligned} i_r &= |i| \cos(\varphi), & i_i &= |i| \sin(\varphi), \\ |i| &= \sqrt{i_r^2 + i_i^2}, & \varphi &= \arctg \frac{i_i}{i_r}. \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

Odtud také plyne

$$i_r = |i| \cos(\varphi) = |i| \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (7.2.2)$$

takže reálnou složku dostaneme z imaginární, pokud ji posuneme o fázovou konstantu $\pi/2 = 90^\circ$.



Obrázek 7.2.2: Proudová hustota v tyči — amplituda a fáze

Kvantitativní výsledky lze zjistit z parametrických grafů. Na obr. 7.2.3 je průběh reálné a imaginární složky proudové hustoty ve svislém směru pro různé vzdálenosti od střední svislé roviny vodiče. Imaginární složka má na povrchu $y = -b$ a $y = b$ konstantní hodnotu. Má ji i reálná složka, ale v těsné blízkosti povrchu dosahuje lokálního (i absolutního) maxima. Okrajové podmínky jsou tedy splněny i pro tuto složku. Tím je vysvětlen i 2D průběh reálné složky na obr. 7.2.1.

Maximum proudové hustoty ve směru delší strany tyče je v poměrně těsné blízkosti povrchu, ale nikoliv na něm. Pak proudová hustota s rostoucí hloubkou poměrně prudce klesá na malé vzdálenosti a pak zůstává konstantní. Pro větší hloubky nabývá lokálního minima a po něm následuje úsek konstantní proudové hustoty. Blízko středu vodiče má lokální minimum zápornou hodnotu. V něm teče proud o nejvyšší hustotě opačným směrem. Blízko středu vodiče teče malý proud opačným směrem a jeho hustota je přibližně konstantní. Průběh proudové hustoty podél delší strany je tedy složitější než se běžně uvádí.

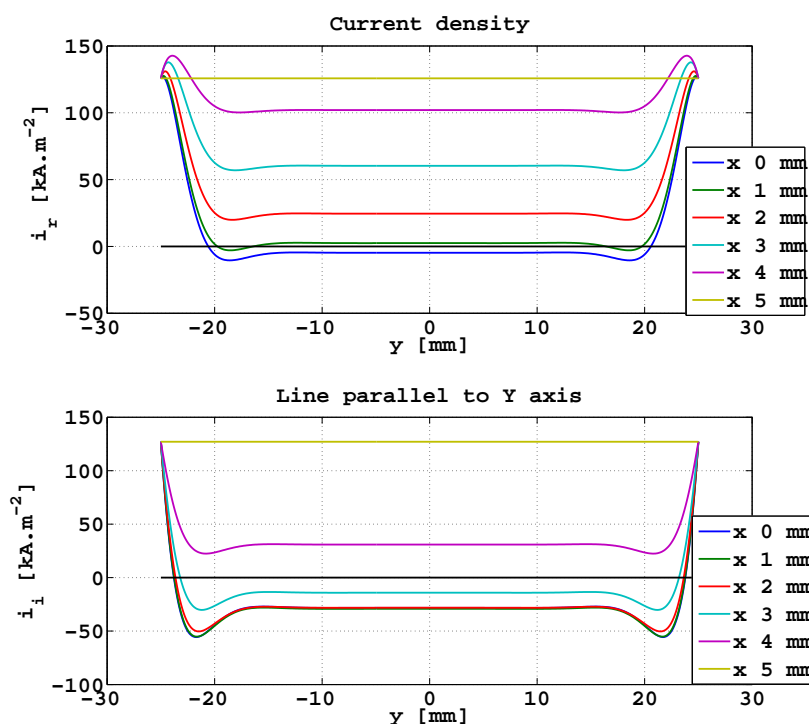
Imaginární složka na obr. 7.2.4 představuje průběh proudové hustoty v okamžiku o čtvrt periody pozdějším. Zde je průběh proudové hustoty podobný, ale nejsou lokální maxima. Změna průběhů s časem je též na přiloženém videu.

Na obr. 7.2.6 je průběh proudové hustoty podél delší stěny vodiče pro amplitudu a fázi. Amplituda nabývá maxima na okraji vodiče, pak poměrně prudce klesá ke zhruba konstantní hodnotě v širokém úseku kolem středu tyče. Průběh fáze je složitější, na povrchu je fázový posuv kolem 45° , pak klesá k lokálnímu minimu, poněkud vzroste a v poměrně široké oblasti kolem středu vodiče je zhruba konstantní. Ve větších hloubkách nabývá fázový úhel záporné hodnoty. V blízkosti středu vodiče tato záporná hodnota fázového úhlu klesá pod -90° , což z hlediska teorie obvodů znamená, že se jedná o zdroj. Proud tedy v této části vodiče teče opačným směrem. V porovnání s reálnou složkou proudové hustoty na obr. 7.2.3 je zřejmé, že fázový úhel je poněkud citlivější a přináší podrobnější informace, zejména o směru proudu.

Průběh proudové hustoty podél kratší stěny vodiče je na obr. 7.2.5 pro reálnou a ima-

ginární složku a na obr. 7.2.6 pro její amplitudu a fázi. Reálná složka proudové hustoty v tomto případě monotonně klesá s hloubkou a nabývá minima uprostřed vodiče. Blízko středu vodiče je toto minimum záporné, v okolí středu vodiče tedy teče proud opačným směrem. Průběh imaginární složky je trochu složitější, po případném slabém zákmitu nabývá v okolí středu vodiče zhruba konstantní hodnoty. Proud teče opačným směrem v poměrně rozsáhlé vnitřní oblasti. V podstatě jde na tomto obrázku opět o průběh proudové hustoty ve dvou okamžicích vzdálených o čtvrt periody.

Průběh amplitudy a fáze proudové hustoty podél kratší stěny vodiče je na obr. 7.2.6. Průběh amplitudy potvrzuje, že proudová hustota klesá směrem do vodiče. Fáze na povrchu vodiče nabývá hodnoty kolem 45° , směrem do vodiče klesá, nabývá záporných hodnot a blízko středu vodiče klesne pod -90° , proud tedy teče opačným směrem.

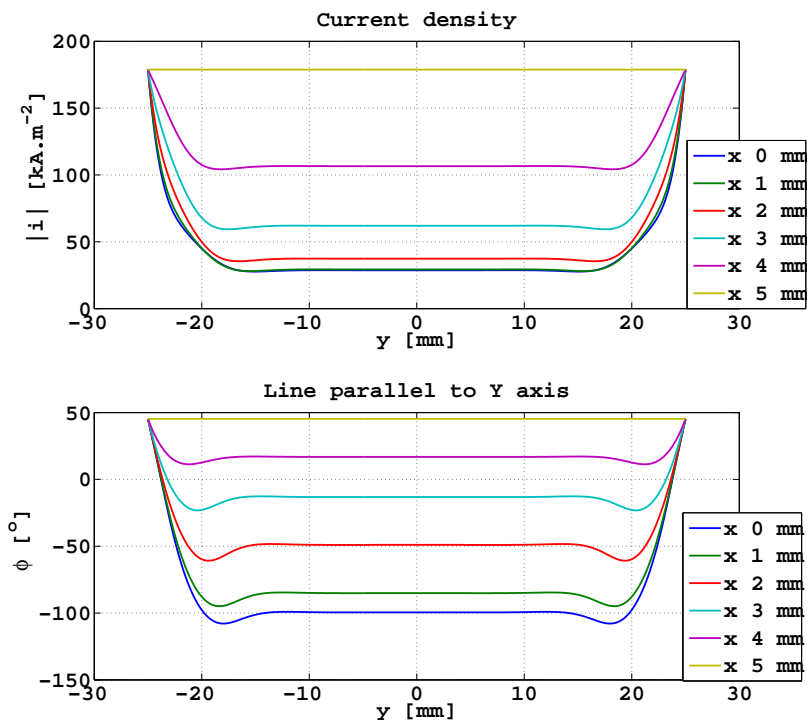


Obrázek 7.2.3: Proudová hustota v tyči podél výšky — reálná a imaginární složka

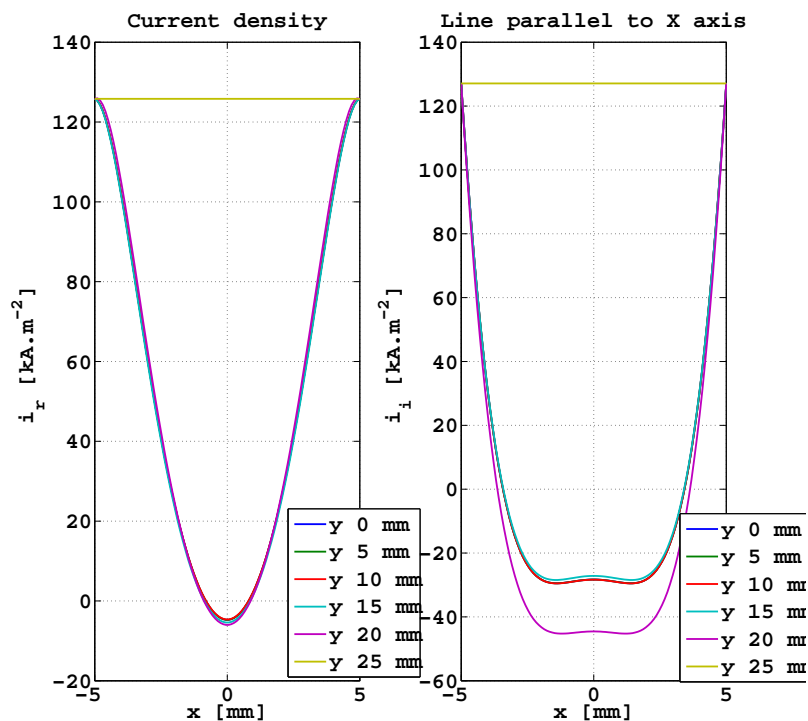
7.2.2 Frekvenční závislost povrchové proudové hustoty

Jedinou veličinou, kterou lze snadno měřit, je napětí na povrchu vodiče. Proto je na obr. 7.2.7 uvedena frekvenční závislost amplitudy povrchového proudu. Tyč má opět rozměry 10 x 50 mm a teče v ní proud 1000 A při všech frekvencích. Jak se dalo očekávat, s rostoucí frekvencí hustota proudu na povrchu tyče narůstá, proud je vytlačován na povrch vodiče, jak se říká v základních učebnicích.

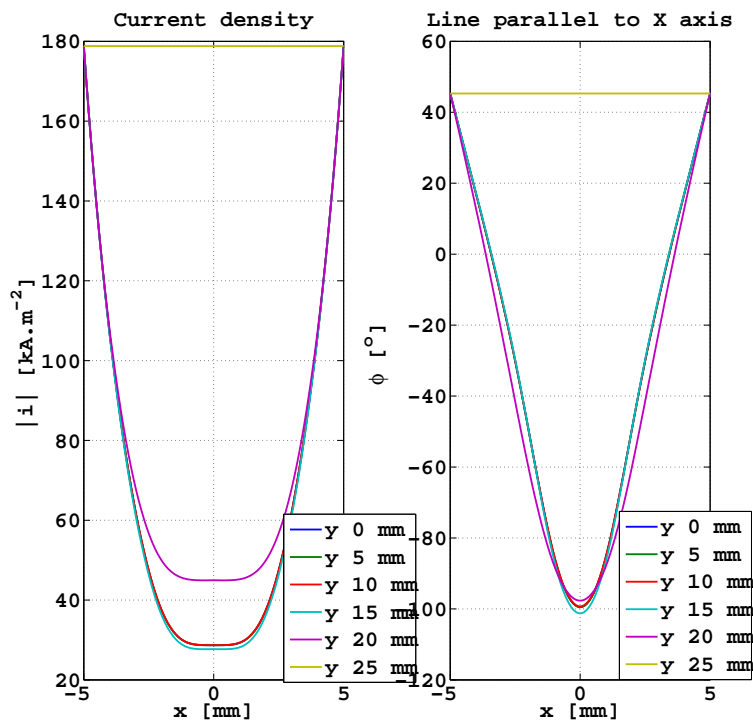
Frekvenční závislost fáze povrchového proudu je na obr. 7.2.8. Při nízkých frekvencích se blíží k nule při vysokých se blíží k hodnotě 45° . Její nárůst však není monotonní, existují dvě lokální maxima. První výrazné maximum je kolem frekvence 20 Hz, druhé, podružné, kolem frekvence 800 Hz. Zde fáze přesahuje hodnotu 45° . Jejich příčinu a význam neumíme vysvětlit. Program je poměrně jednoduchý, takže asi nejde o chybu v programu.



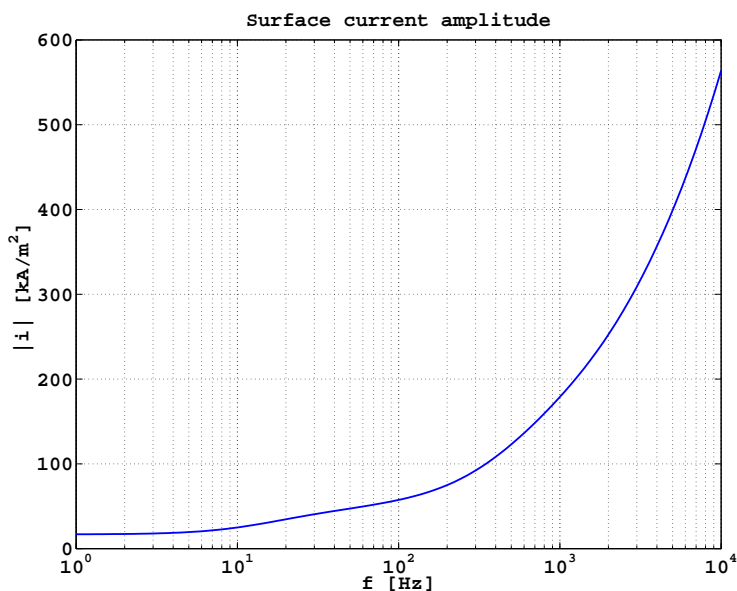
Obrázek 7.2.4: Proudová hustota v tyči podél výšky — amplituda a fáze



Obrázek 7.2.5: Proudová hustota v tyči podél vodorovné úsečky — reálná a imaginární složka



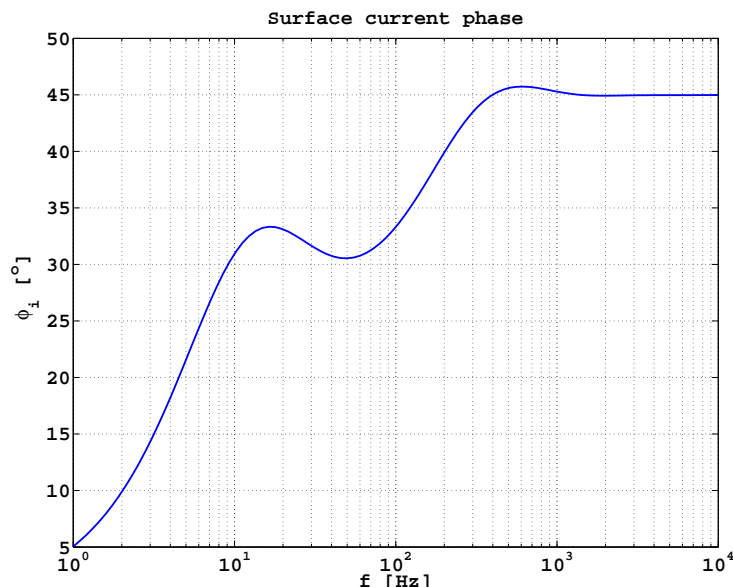
Obrázek 7.2.6: Proudová hustota v tyči podél vodorovné úsečky — amplituda a fáze



Obrázek 7.2.7: Proudová hustota na povrchu svislé stěny tyče — amplituda

7.3 Měření napětí na povrchu vodiče

Při různých příležitostech bylo již několikrát poukázáno na to, že kromě magnetického pole je další relativně snadno měřitelnou veličinou napětí na povrchu vodiče. V principu lze k povrchu vodiče přiložit sondy ve stejné vzdálenosti od hrany a měřit napětí mezi nimi. Skutečné technické řešení je popsáno v kapitole Experiment.



Obrázek 7.2.8: Proudová hustota na povrchu svislé stěny tyče — fáze

Je zde však zásadní fyzikální i technický problém. Poněvadž je intenzita elektrického pole ve vodiči a tudíž i na jeho povrchu nízká, je nutno volit poměrně velkou vzdálenost mezi sondami, aby měřené napětí bylo málo zatíženo chybou přístroje. Měřený úsek vodiče, přívodní vodiče a vstup měřícího přístroje pak tvoří smyčku. Plocha obklopená touto smyčkou není zanedbatelná a nelze ji snižovat pod určitou mez technickými prostředky. V okolí vodiče je časově proměnné magnetické pole a ve smyčce se tudíž indukuje napětí, které se vektorově skládá s užitečným napětím na povrchu vodiče mezi sondami. Přístroj pak neměří hledané napětí, ale vektorový součet tohoto napětí a indukovaného napětí.

Jedním z řešení je provést další měření, kterým by se zjistilo pouze indukované napětí. V principu by se sondy měly odizolovat od povrchu vodiče a zkratovat. Bylo učiněno několik pokusů o účinný zkrat (volný drát, tuhý drát, vodivý pásek). První dva pokusy zvětšovaly plochu obklopenou smyčkou, volný drát daleko více. Nakonec se jako nejlepší řešení ukázalo použití vodivého měděného pásku, který měl na jedné straně tenkou izolační vrstvu. Tento pásek se přitiskl izolací k ploše vodiče a přiložily se k němu sondy na straně mědi. Tím se současně zajistilo odizolování sond od vodiče a jejich zkratování. Teoreticky se na geometrii nic nezměnilo.

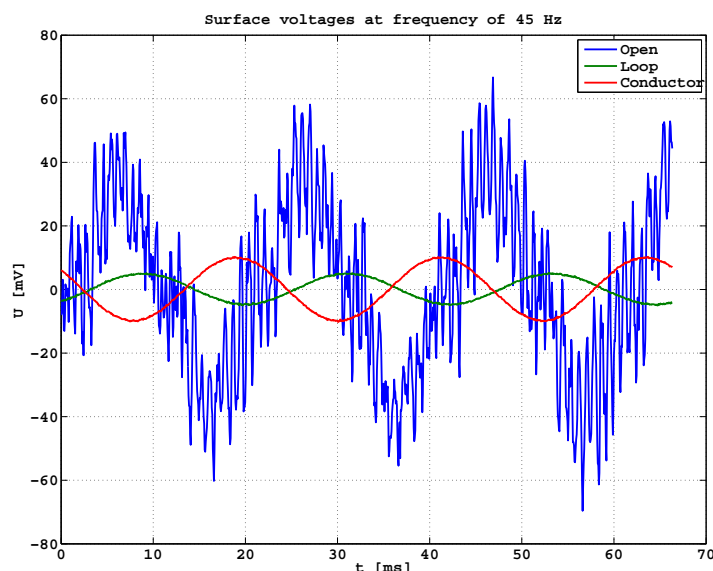
Byly použity tři dvojice sond na svislé stěně vodiče, tj. byla měřena tři napětí. Napětí bylo měřeno v těchto polohách: těsně pod hranou, ve vzdálenosti od hrany rovné zhruba čtvrtině výšky plochy a uprostřed plochy. V principu by se tedy měla zachytit případná nerovnoměrnost povrchové proudové hustoty.

Popis a postup měření je v kapitole Experiment, část 4.6. Prakticky jsme měřili tři napětí

1. Napětí mezi volnými sondami, tedy napětí naprázdno. Pro určení hledaného napětí toto měření nemělo význam, dávalo však zajímavé výsledky.
2. Napětí mezi zkratovanými sondami odizolovanými od povrchu vodiče pomocí měděného pásku, zpočátku i jiným způsobem. Jde o indukované napětí a pracovně je nazveme napětí na smyčce. O toto napětí je nutno výsledek dalšího měření korigovat.
3. Napětí mezi sondami přiloženými na povrch vodiče. Zde jde o součet skutečného úbytku napětí na vodiči a indukovaného napětí. Nazveme je pracovně napětí na vodiči.

K získání skutečného úbytku napětí na vodiči je nutno od něho odečíst předchozí napětí s ohledem na amplitudu i fázi.

Příklad všech tří napětí je na obr. 7.3.1 pro vnucenou frekvenci 45 Hz. Fázový vztah mezi napětími je nahodilý, poněvadž byla měřena postupně. Napětí naprázdno je superpozicí frekvence sítě a nějaké vyšší frekvence. Ostatní dvě napětí mají zhruba harmonický časový průběh a šum je relativně malý.



Obrázek 7.3.1: Napětí mezi sondami měřená ve třech režimech

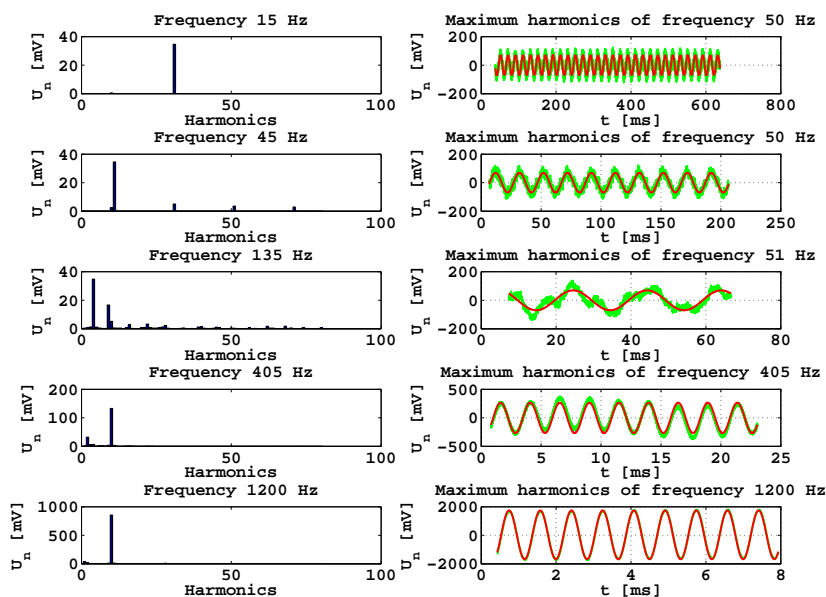
Zpracování výsledků automatizovaného měření budícího proudu a napětí mezi sondami proběhlo podle kapitoly Výpočty, část 5.1. Zpravidla dále pracujeme s aproximovaným napětím získaným z maximální harmonické. Významné dosažené výsledky a jejich interpretaci popisujeme v dalších částech.

Prvním cílem bylo zjistit reprodukovatelnost měření. Provedli jsme opakovaná měření při daném uspořádání sond, tedy se zjišťovala reprodukovatelnost elektrických měření. Odchylky byly malé a náhodné, tedy tato reprodukovatelnost těchto měření byla vysoká. Dále jsme vyšetřovali reprodukovatelnost mechanickou, tj. sondy byly znovu připevněny. Zde byly relativní odchylky asi do pěti procent, tedy i tato reprodukovatelnost byla s ohledem na podmínky experimentu dobrá. Výsledné naměřené hodnoty lze tedy považovat za spolehlivé. Grafické výstupy neuvádíme, jen shrneme, že celkem bylo provedeno 9 zkoušek reprodukovatelnosti, z toho se třikrát znovu připevňovaly sondy.

7.3.1 Napětí naprázdno

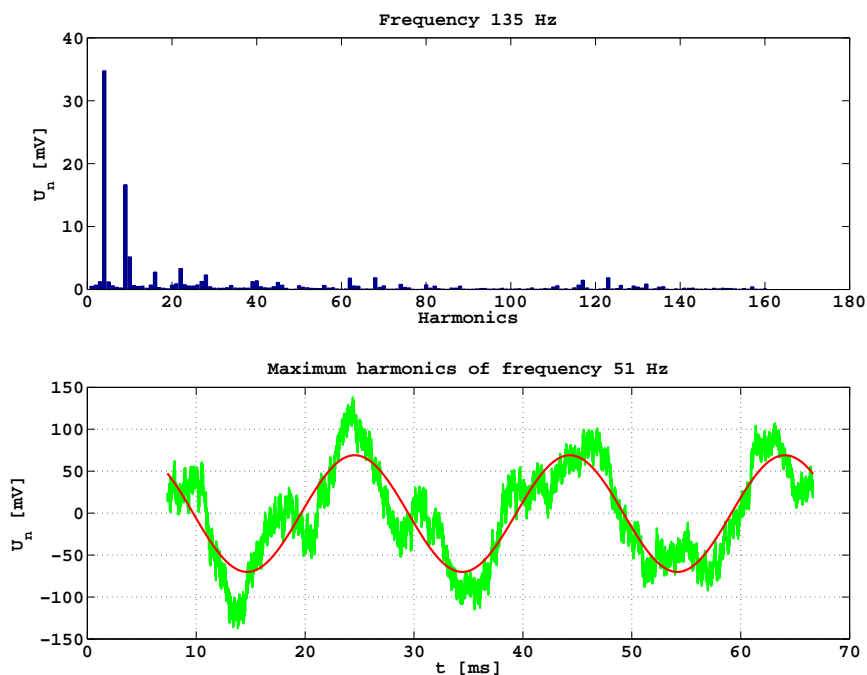
Ačkoliv měření naprázdno nelze přímo využít, ve stručnosti uvádíme zajímavé výsledky. Průběh ve frekvenční a časové oblasti pro sledované frekvence 15, 45, 135, 405 a 1200 Hz je na obr. 7.3.2. Pro aproximaci je použita harmonická s maximální amplitudou. Pro nízké frekvence, až do 135 Hz včetně, se prosadí složka o síťové frekvenci 50 Hz. Indukované napětí od budícího proudu je proti ní slabé. Nad touto frekvencí však indukované napětí převládne, maximální harmonická je při vnucené frekvenci.

Po získání lepší představy je na obr. 7.3.3 průběh napětí naprázdno ve frekvenční a časové oblasti při frekvenci 135 Hz. Spektrum je poměrně složité a maximální harmonická



Obrázek 7.3.2: Napětí naprázdno ve frekvenční a časové oblasti pro použité frekvence

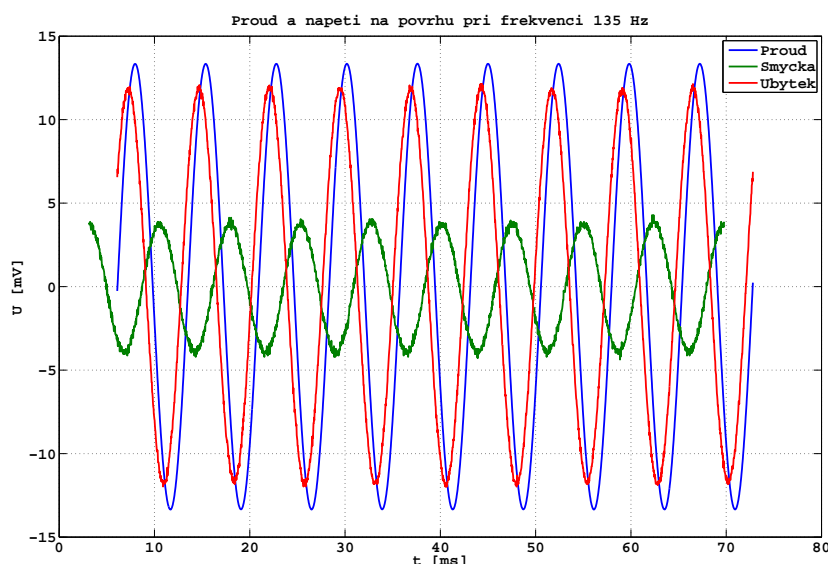
je při frekvenci 51 Hz. Při mírně vyšší vnucené frekvenci se přesune ještě blíže k této vnucené frekvenci. Jev má však dosti značnou neurčitost.



Obrázek 7.3.3: Napětí naprázdno ve frekvenční a časové oblasti pro frekvenci 135 Hz

7.3.2 Napětí na smyčce a na vodiči

Pro určení skutečného úbytku napětí na vodiči je nutno změřit napětí na smyčce a na vodiči. Jejich fázový vztah k budícímu proudu² při frekvenci 135 Hz je na obr. 7.3.4. Napětí na vodiči je zhruba ve fázi s budícím proudem, napětí ve smyčce je vůči němu posunuto o asi čtvrt periody. Je tedy přibližně v kvadratuře. Indukované napětí ve smyčce je při této frekvenci malé v porovnání s napětím měřeným na vodiči. S takto naměřenými napětími byly provedeny další operace.



Obrázek 7.3.4: Proud, napětí ve smyčce a napětí na vodiči při frekvenci 135 Hz.

7.3.3 Vliv polohy sond

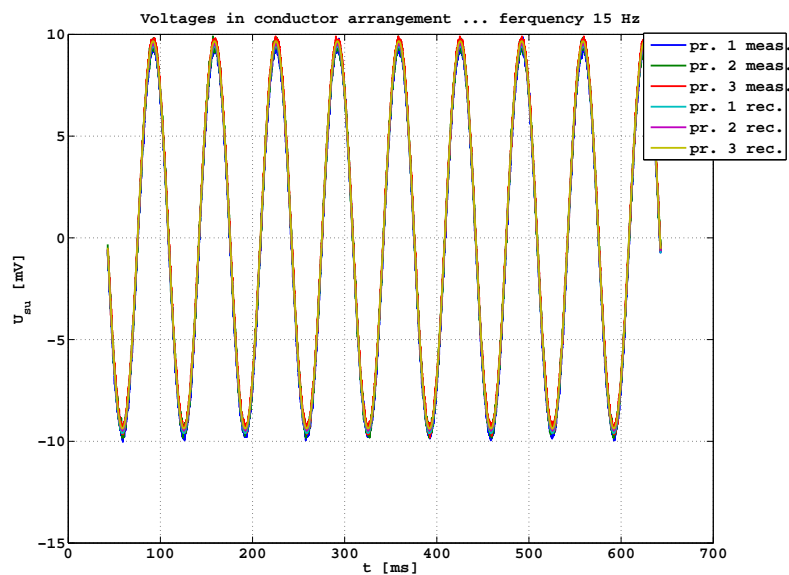
Základním cílem bylo zjistit, jak se liší napětí měřená na jednotlivých dvojicích sond. Výsledky měření pro nejnižší nastavitelnou frekvenci 15 Hz na smyčce jsou na obr. 7.3.6 a pro vodič na obr. 7.3.5. Na těchto detailních obrázcích jsou uvedeny jednak skutečně naměřené průběhy se šumem, které jsou označeny jako "pr. x meas.", kde x je pořadí sondy, jednak průběhy aproximované maximální harmonickou, které mají označení "pr. x rec.". Sonda číslo 1 je těsně u hrany vodiče, sonda s pořadovým číslem 3 je zhruba uprostřed vodiče.

Tyto dva obrázky, obr. 7.3.5 i 7.3.6 se vztahují k nejhoršímu případu, kdy je napětí na povrchu vodiče nebo pásku nejmenší. Je dobré si na obr. 7.3.5 povšimnout, že rušení na vodiči je velmi malé i při nejnižší frekvenci. Při nízkých frekvencích se na smyčce uplatňuje výrazný šum, jak ukazuje obr. 7.3.6. I přes výrazný šum se však aproximace liší málo. Tedy i v tomto nejhorším případě nezávisí napětí (jak amplituda, tak fáze) na smyčce na poloze sondy.

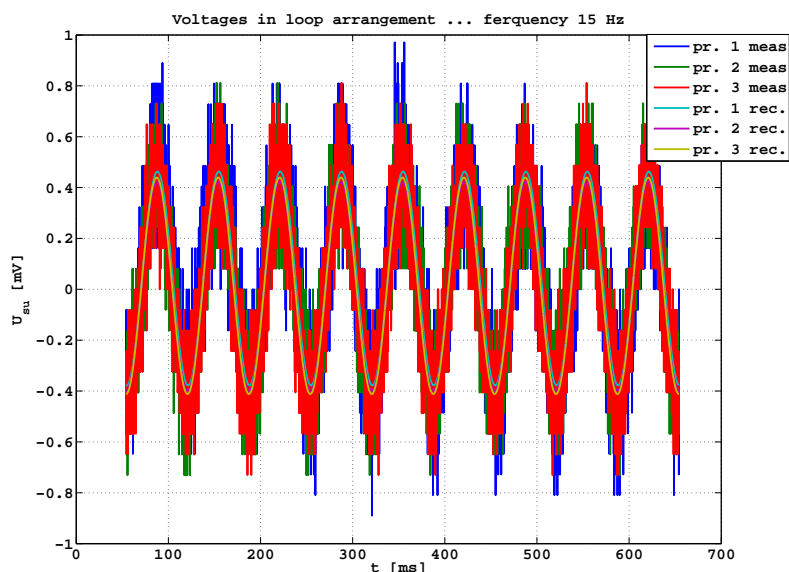
Rušení na smyčce se snižuje s rostoucí frekvencí tak, jak amplituda užitečného napětí stoupá. Pro vysoké frekvence (nad 135 Hz) jsou průběhy napětí na smyčce i vodiči obdobné průběhu napětí na vodiči podle obr. 7.3.5. Liší se jen v amplitudě a fázovém posuvu.

Skutečný úbytek napětí na vodiči vyvolaný skinefektem, případně vířivými proudy, se získá vektorovým odečtením napětí na vodiči a napětí na sondě. Všechna tři napětí (sonda,

²Budící proud není v měřítku, napětí ano.



Obrázek 7.3.5: Napětí na vodiči od různých sond při frekvenci 15 Hz.

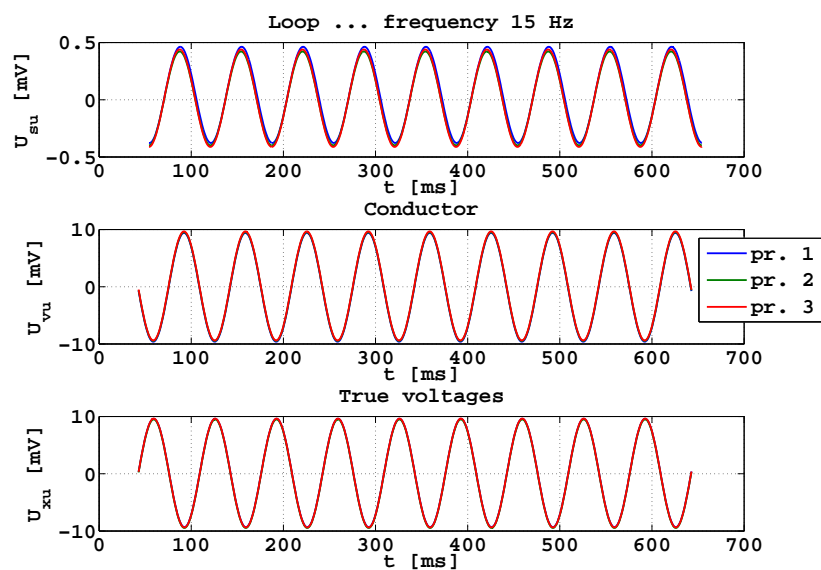


Obrázek 7.3.6: Napětí na smyčce od různých sond při frekvenci 15 Hz.

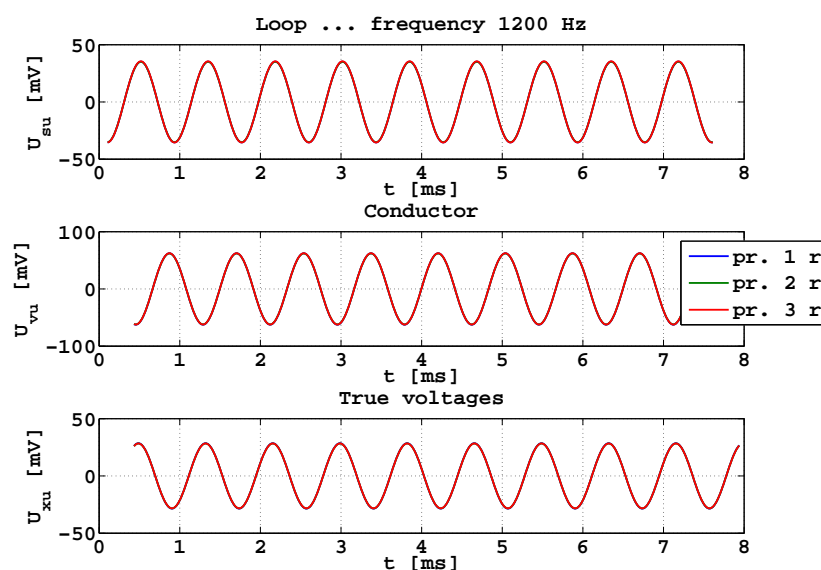
vodič a skutečné) jsou pro porovnání na obr. 7.3.7 pro frekvenci 15 Hz. Jsou uvedeny jen aproximované průběhy získané z maximální harmonické (a stejnosměrné složky). Trochu se pro jednotlivé sondy liší jen průběhy na smyčce. Ostatní dvě napětí jsou pro všechny sondy stejné, při daném rozlišení obrázku.

Obdobné srovnání všech tří napětí pro nejvyšší frekvenci 1200 Hz je na obr. 7.3.8. Dané rozlišení nyní neumožní zjistit rozdíl v žádném případě.

Z posledních dvou obrázků je ale též zřejmé, že fáze jednotlivých napětí (smyčka, vodič, skutečné) se liší. Všechna napětí byla nastavena k nulové hodnotě budícího proudu, jak o tom píšeme v kapitole Výpočty, část 5.1.1. Podrobněji se tento jev rozebírá v následující části 7.3.4.



Obrázek 7.3.7: Porovnání napětí pro smyčku, vodič a skutečný úbytek od různých sond při frekvenci 15 Hz



Obrázek 7.3.8: Porovnání napětí pro smyčku, vodič a skutečný úbytek od různých sond při frekvenci 1200 Hz.

Kvantitativní představu o velikosti rušení nám dává tabulka 7.3.1. V procentech jsou zde uvedeny průměrné a maximální relativní odchylky jak pro smyčku, tak pro vodič. Byly vztaženy k průměrné absolutní hodnotě užitečného napětí. Tabulka 7.3.1 udává jejich závislost na frekvenci. Obecně platí, že maximální odchylka je asi pětikrát až desetkrát vyšší. Důležitější je však průměrná odchylka. Pro smyčku je průměrná relativní odchylka napětí pro nízké frekvence významná. To potvrzuje i obr. 7.3.6. S rostoucí frekvencí výrazně klesá. Pro vodič je průměrná relativní odchylka napětí nízká při všech frekvencích. Pro vysoké frekvence jsou hodnoty pro smyčku i vodič srovnatelné. Z tabulky 7.3.1 je zřejmé, že

Tabulka 7.3.1: Relativní odchylky pro napětí na smyčce a vodiči

Frekvence	15	45	135	405	1200
Smyčka, prům. rel. odch.	17	7,6	3,1	0,77	0,27
Smyčka, max. rel. odch.	126	44	17	5	1,7
Vodič, prům. rel. odch.	2,8	2,7	2,7	1,37	0,61
Vodič, max. rel. odch.	22	19	17	8,4	3,7

napětí na vodiči zjišťujeme s relativní chybou pod 3 % při všech frekvencích. Pro smyčku to platí od frekvence asi 150 Hz. Obě napětí tedy známe poměrně přesně.

Z obrázků zde uvedených i tabulky 7.3.1 je zřejmé, že sondy na vodiči naměří stejný skutečný úbytek napětí, co do amplitudy i fáze, bez ohledu na jejich polohu a to jak při nejnižší, tak při nejvyšší frekvenci. Při nejnižší frekvenci by se skinefekt podle teoretických výpočtů uplatnit neměl a výsledek je dle očekávání. Při nejvyšší frekvenci by mohl být jeho vliv zřetelný, pokud by platila teorie proměnného povrchového proudu. Ale není tomu tak, alespoň při dané přesnosti a citlivosti experimentu. Amplituda skutečného úbytku napětí na povrchu vodiče je všude stejná, s rostoucí frekvencí stoupá. Mění se i fázový posuv. To lze připsat jak skinefektu, tak vířivým proudům. Pokud je měřené napětí na povrchu vodiče určeno elektrickým polem pouze na povrchu vodiče, můžeme usuzovat, že toto elektrické pole je na povrchu vodiče konstantní. Poněvadž elektrické pole na povrchu vodiče je úměrné povrchové proudové hustotě, můžeme usuzovat, že proudová hustota je při všech sledovaných frekvencích na povrchu vodiče konstantní. Zdá se, že platí okrajové podmínky použité v teoretickém výpočtu, viz kapitola Teorie, část 3.6.

7.3.4 Frekvenční závislost napětí na povrchu vodiče

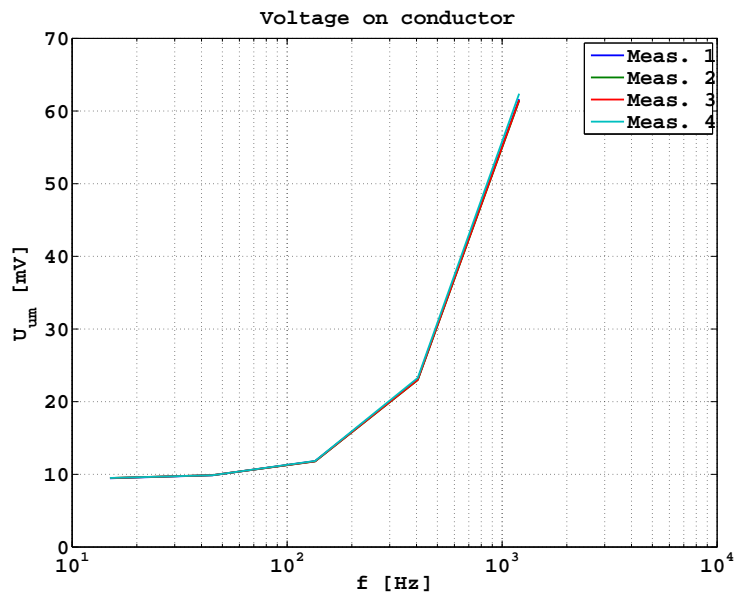
Z obr. 7.3.4 je zřejmé, že naměřená napětí na smyčce a na vodiči se liší jak v amplitudě, tak ve fázi. Z těchto výsledků byly zjištěny frekvenční závislosti. Jako ukázka je na obr. 7.3.9 uvedena frekvenční závislost amplitudy napětí na vodiči pro několik opakovaných měření. Napětí roste se vzrůstající frekvencí a rozptyl hodnot od jednotlivých měření je malý.

V tomto a dalších grafech je jen několik experimentálních bodů, které jsou spojeny lomenou čarou. Lepší by bylo uvést tyto body pomocí značek a průběh aproximovat, např. polynomickou regresí. Poněvadž nám však jde o získání celkové představy a koeficienty polynomické regrese obvykle nemají fyzikální význam, upustili jsme od tohoto řešení. Má i své výhody, jak uvidíme dále.

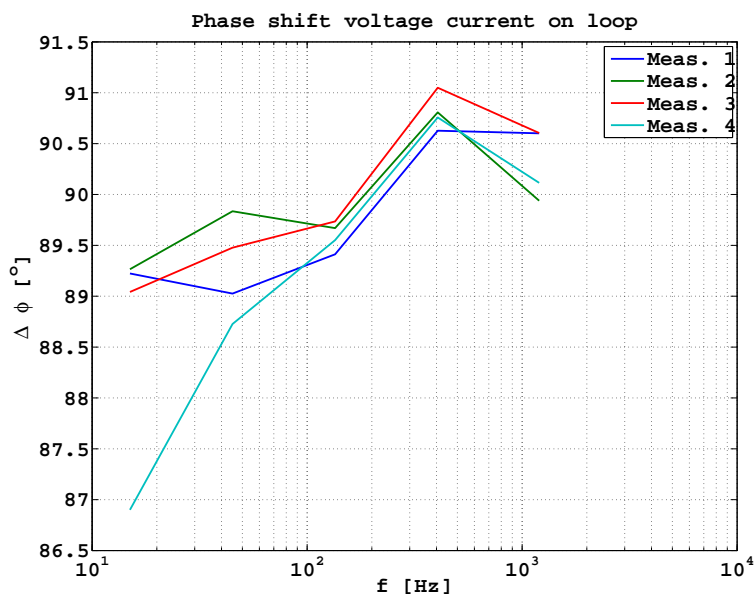
Na obr. 7.3.10 je uvedena frekvenční závislost fázového posuvu napětí na smyčce vůči budícímu proudu. Zde je vidět výhoda spojování experimentálních bodů lomenou čarou. Pokud by byly pouze značky, nevyznali bychom se v grafu. Použití regrese by při tomto měřítku bylo též nešťastné. Tento fázový posuv nabývá hodnoty kolem 90°. To odpovídá fyzikální představě — jedná se o indukované napětí, které je vůči budícímu proudu posunuto právě o 90°. Rozptyl naměřených hodnot je poměrně malý, což potvrzuje vysokou přesnost měření. Relativní chyba fázového posuvu je pod 2 %.

Porovnání frekvenčních závislostí obou napětí, na smyčce a na vodiči je na obr. 7.3.11. Jejich vektorovým odečtením, viz koncová část 3.11 kapitoly Teorie, bylo získáno skutečné napětí na vodiči bez vlivu napětí indukovaného ve smyčce. Na obr. 7.3.11 je připsáno skinefektu.

Porovnání frekvenčních závislostí fázových posuvů obou napětí (vůči budícímu proudu), na smyčce a na vodiči, je na obr. 7.3.12. Pomocí vztahů na konci kapitoly Teorie byl získán



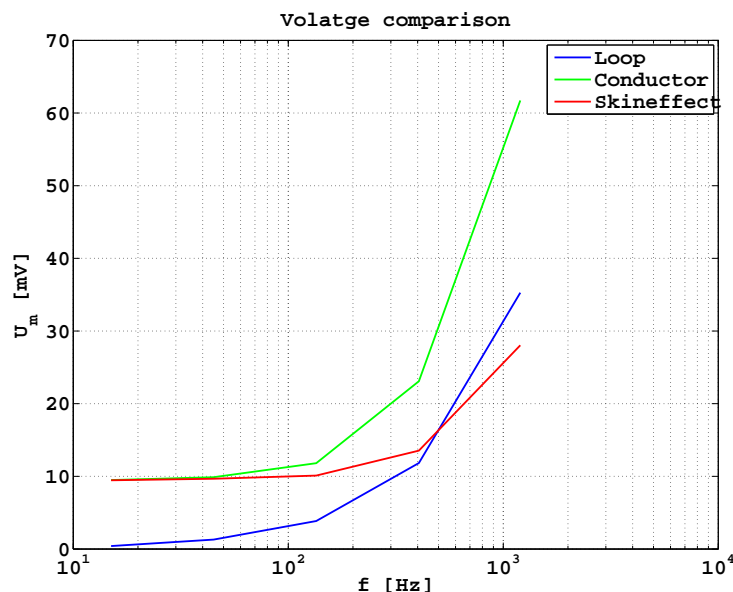
Obrázek 7.3.9: Naměřená frekvenční závislost napětí na vodiči



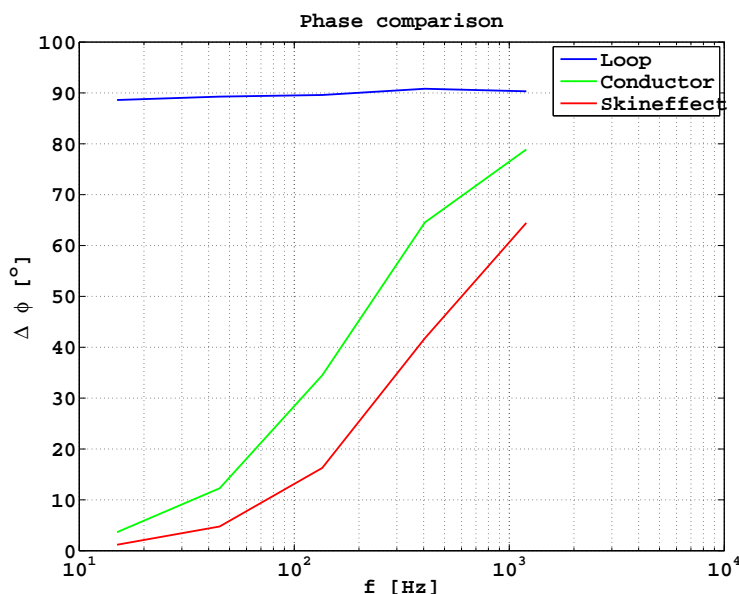
Obrázek 7.3.10: Naměřená frekvenční závislost fáze na smyčce

skutečné skutečný fázový posuv napětí na vodiči vůči budícímu proudu bez vlivu elektromagnetické indukce ve smyčce. Na obr. 7.3.12 je opět připsáno skinefektu.

Porovnání s teorií uvedenou v předchozí části je na dalších dvou obrázcích. Na obr. 7.3.13 je porovnání amplitud. Teoretická amplituda je ovšem 80 krát zvětšena. Pak dochází k určitému souhlasu. Na obr. 7.3.14 je porovnání fázových posuvů. Zde je souhlas špatný, pouze je zřejmá stoupající tendence. Možné vysvětlení ponecháváme do diskuse.



Obrázek 7.3.11: Porovnání frekvenčních závislostí amplitudy napětí na vodiči a smyčce

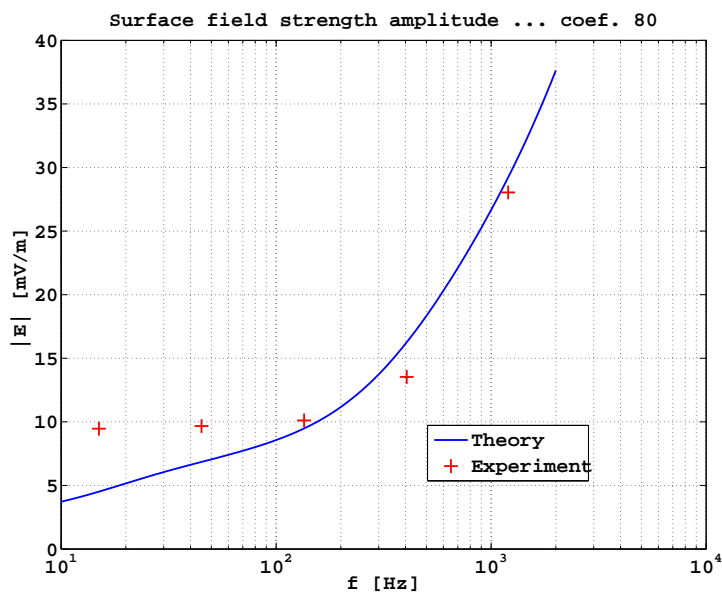


Obrázek 7.3.12: Porovnání frekvenčních závislostí fází na vodiči a smyčce.

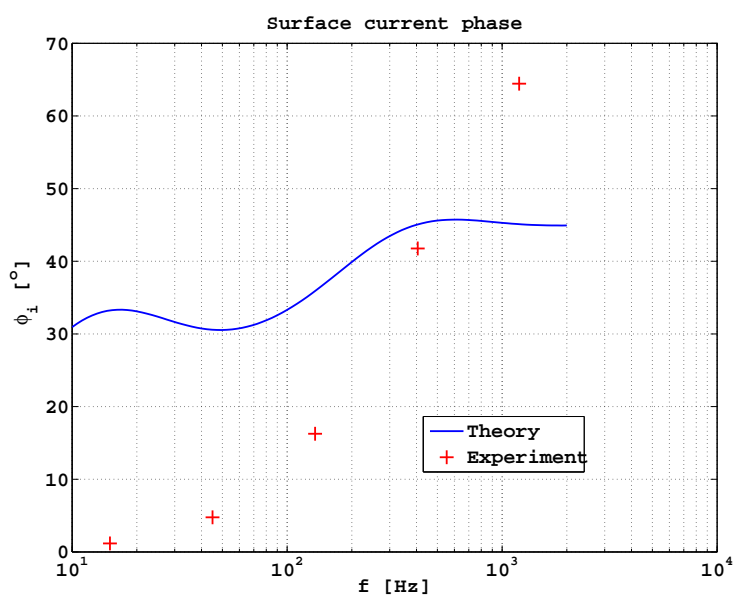
7.4 Průběh magnetického pole v okolí vodiče

Největší pozornost, alespoň po experimentální stránce, byla věnována měření magnetického pole v okolí vodiče. Počáteční ověřovací experimenty byly provedeny pro třífázovou síť. Poněvadž nám šlo zejména o ověření teoretických vztahů pro skinefekt, těžiště experimentů se přesunulo do experimentů s jednou aktivní fází ve středním vodiči. Podrobnosti jsou v kapitole Experiment část 4.4.

V této části uvedeme zejména klíčové experimentální výsledky. Pro získání představ s jakými daty jsme pracovali, jsou nejdříve uvedeny typické průběhy v časové oblasti. Dále budeme sledovat, jak průběh pole závisí na poloze úsečky, na níž bylo měření provedeno



Obrázek 7.3.13: Porovnání vypočtené a změřené frekvenční závislosti pro amplitudu



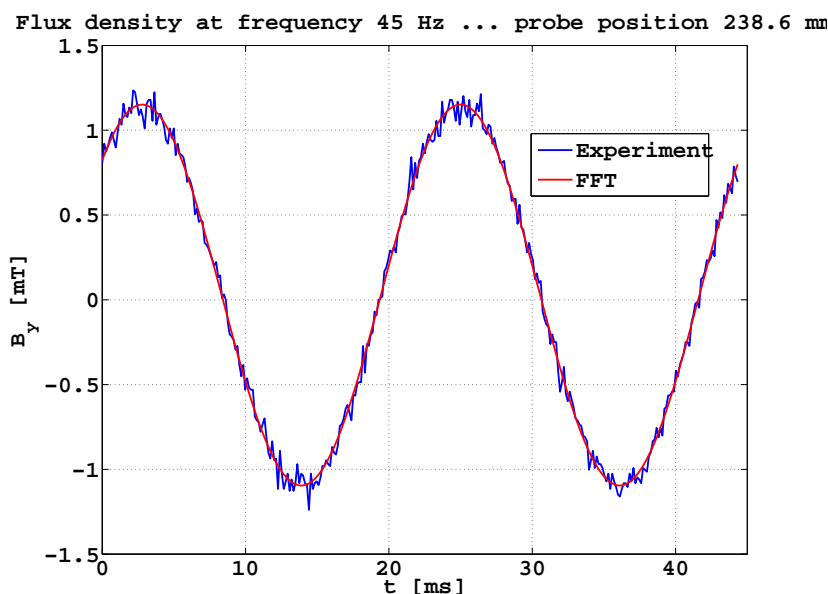
Obrázek 7.3.14: Porovnání vypočtené a změřené frekvenční závislosti pro fázový posuv

zejména, je-li uprostřed přímého vodiče nebo blízko transformátorů a přírodních vodičů. Poněvadž nám stále jde o ověření skin efektu, posoudíme příspěvek od vířivých proudů. Nakonec porovnáme vypočtené a naměřené výsledky pro skin efekt.

7.4.1 Časová oblast

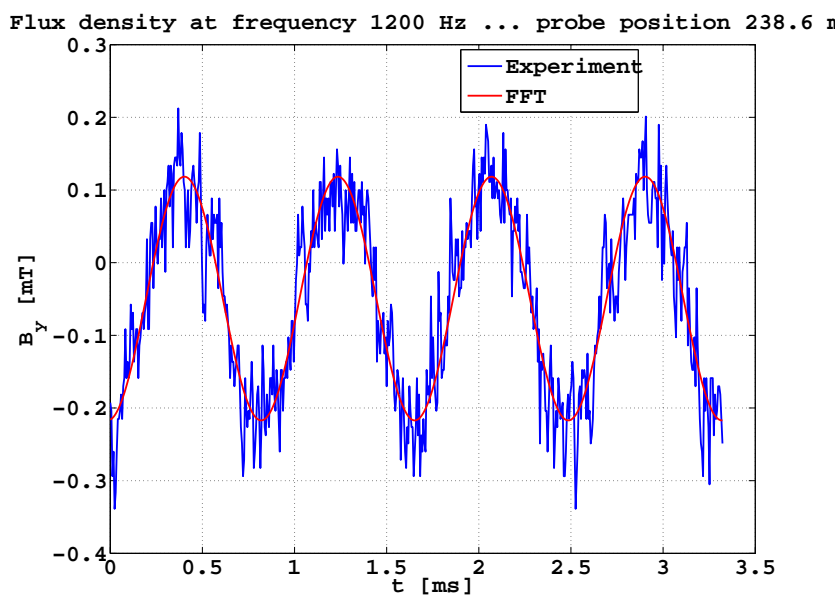
Při krajní vysoké frekvenci 1200 Hz, která byla pro nás nejdůležitější, tekli vodiči poměrně slabý proud a buzené magnetické pole bylo rovněž slabé, často na hranici měřitelnosti. Porovnání průběhu svislé složky magnetické indukce pro nízkou frekvenci 45 Hz, která je blízká frekvenci sítě, je na obr. 7.4.1. Šum a rušení existuje, ale je na snesitelné úrovni. Je zde

experimentálně změřený průběh, především jeho aproximace pomocí maximální harmonické, jak je popsáno v kapitole Výpočty, část 5.1.3.



Obrázek 7.4.1: Časový průběh svislé složky magnetické indukce při frekvenci 45 Hz

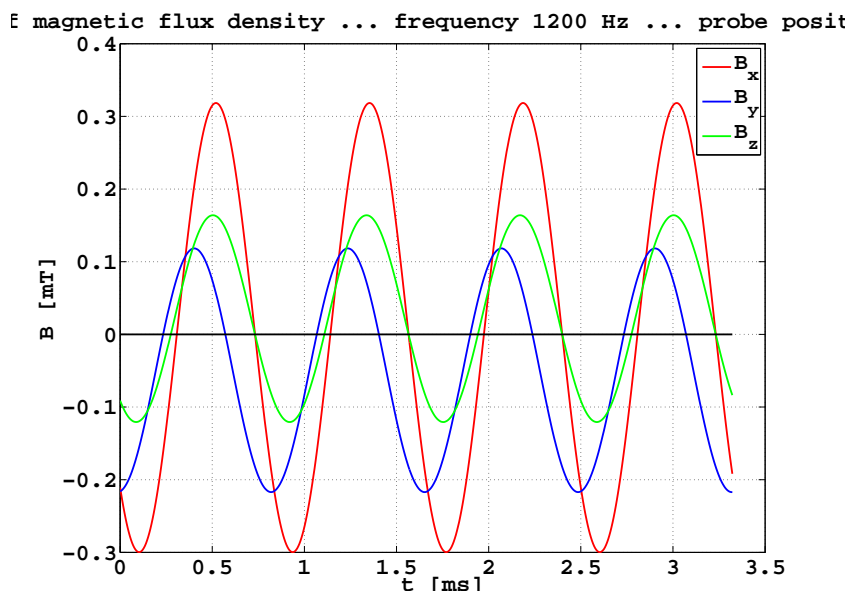
Průběh téže složky magnetické indukce v téže poloze, ale při nejvyšší sledované frekvenci 1200 Hz, je na obr. 7.4.2. Zde je rušení daleko zřetelnější v porovnání s případem na obr. 7.4.1. Pro představu připomeneme, že měřená magnetická indukce je srovnatelná s indukcí zemského magnetického pole, který je kolem $50 \mu\text{T}$. Je nutno navíc zdůraznit, že pro nejvyšší frekvenci nebyl vybrán nejhorší případ.



Obrázek 7.4.2: Časový průběh svislé složky magnetické indukce při frekvenci 1200 Hz

Aproximované průběhy všech tří složek magnetické indukce při nejvyšší frekvenci jsou na obr. 7.4.3. Průběhy nejsou symetrické vzhledem k vodorovné ose. Jedním z vysvětlení je

to, že se může uplatnit zemské magnetické pole. Pro slabší hodnoty indukce je asymetrie daleko víc zřetelná. Neočekávaným výsledkem je poměrně velká axiální složka magnetické indukce, složka B_z . Ta by podle teorie a symetrie úlohy neměla existovat.



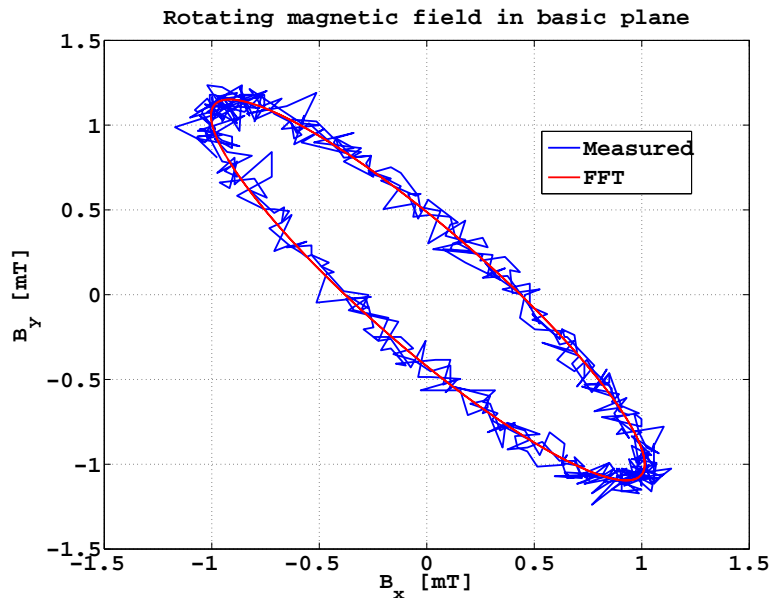
Obrázek 7.4.3: Časové průběhy všech tří složek magnetické indukce při frekvenci 1200 Hz

Poměrně překvapivým bylo zjištění, že i v případě jedné fáze se vytváří v prostoru kolem vodičů točivé magnetické pole. Pro budicí frekvenci 45 Hz je toto pole na obr. 7.4.4 a pro nejvyšší frekvenci 1200 Hz na obr. 7.4.5. V obou případech je zřejmý velký vliv šumu a rušení. Pro nejvyšší frekvenci jsou rušení a šum výrazné, nicméně i v tomto nejnepríznivějším případě lze i z experimentálních bodů elipsu poznat. Zajímavé je i to, že elipsy na obr. 7.4.4 a obr. 7.4.5 jsou orientovány rozdílně, přestože jde o tutéž polohu v magnetickém poli. Liší se jen frekvence, zato více než o řád.

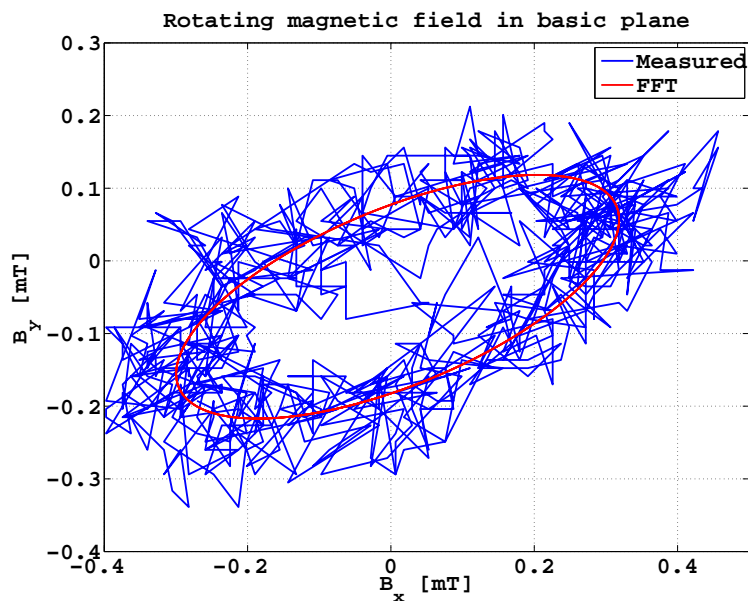
Z hlediska redukce vlivu vířivých proudů je důležitý okamžik v časové oblasti, v němž vzorek magnetické indukce či proudu odebíráme. V datech, které jsou ve vektorovém poli, se jedná o nalezení příslušného indexu. Jeho určení je životně důležité, poněvadž data pro jednotlivé polohy nejsou nijak synchronizována. V kapitole Výpočty část 5.1.1 bylo vysvětleno, jak se synchronizace provádí a to na příkladu měření napětí na povrchu vodiče. Zde je postup stejný. Ve skriptu se tento okamžik zadává pomocí fázové konstanty. Zvolený časový okamžik pro nulovou fázovou konstantu je vyznačen pro průběh proudu při frekvenci 45 Hz na obr. 7.4.6. Pro kontrolu je na tomto obrázku výběr proveden ještě jednou na následující periodě.

Při dostatečně zvětšeném obrázku 7.4.6 se ukazuje, že vybranému časovému okamžiku neodpovídá nulová fázová konstanta. To je způsobeno nízkým počtem vzorků na periodu. Vzorkovací frekvence byla volena tak, aby na periodu připadlo kolem 150 vzorků. Mezi sousedními vzorky je tedy fázový posuv kolem $2,4^\circ$. V nejnepríznivějším případě to může být i odchylka v požadované fázové konstantě. V průměru je poloviční, nicméně zřetelná a může ovlivnit zpracované výsledky.

Snadno lze tento problém redukovat volbou vyšší vzorkovací frekvence. Pak ale narůstá objem uchovávaných experimentálních dat a zpomaluje se jejich zpracování. Je tedy nutno volit rozumný kompromis.



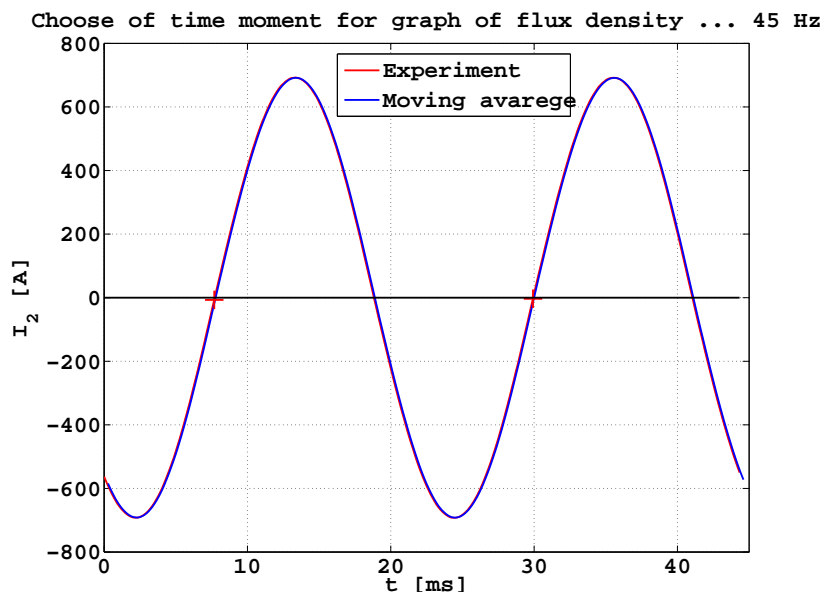
Obrázek 7.4.4: Točivé magnetické pole v jedné aktivní fázi při frekvenci 45 Hz



Obrázek 7.4.5: Točivé magnetické pole v jedné aktivní fázi při frekvenci 1200 Hz

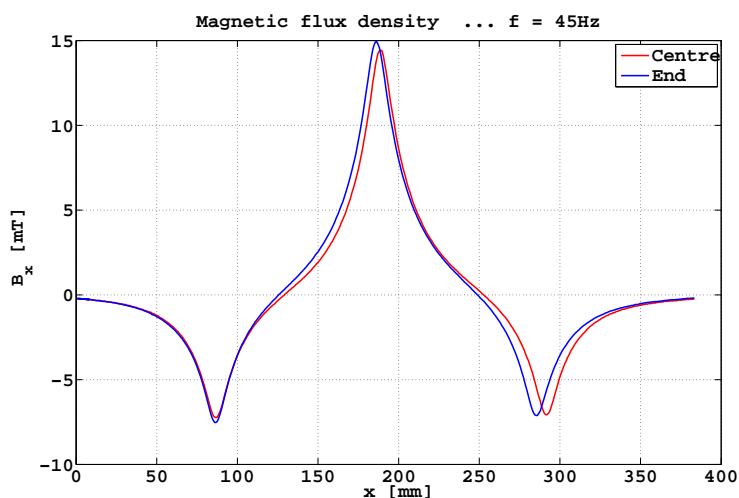
7.4.2 Vliv polohy

S cílem ověřit, do jaké míry můžeme považovat měřený drát za nekonečný, jsme zjišťovali průběh magnetické indukce jednak ve středu přímého masivního vodiče, jednak blízko místa, kde byly vodiče napájeny, přesněji 25 cm od přívodů. Pro nízké frekvence (45 Hz) jsou výsledky na obr. 7.4.7 pro vodorovnou složku B_x magnetické indukce. Hlavní kladné maximum je v rovině souměrnosti středního vodiče, dvě postranní záporná minima jsou pro polohu nad středy postranních vodičů. Poněvadž je souměrné napájení vodičů, vodorovná složka magnetické indukce by měla být symetrická. To je v rámci experimentálních chyb na obr. 7.4.7 potvrzeno. Rozdíl pro sledované polohy (ve svislém směru) je viditelný, avšak



Obrázek 7.4.6: Kontrola časového okamžiku pro nulovou fázovou konstantu budícího proudu při frekvenci 45 Hz

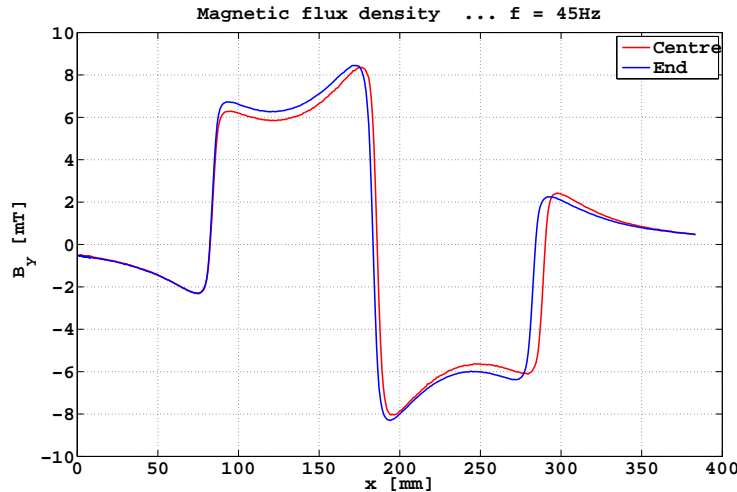
poměrně malý.



Obrázek 7.4.7: Vodorovná složka magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 45 Hz

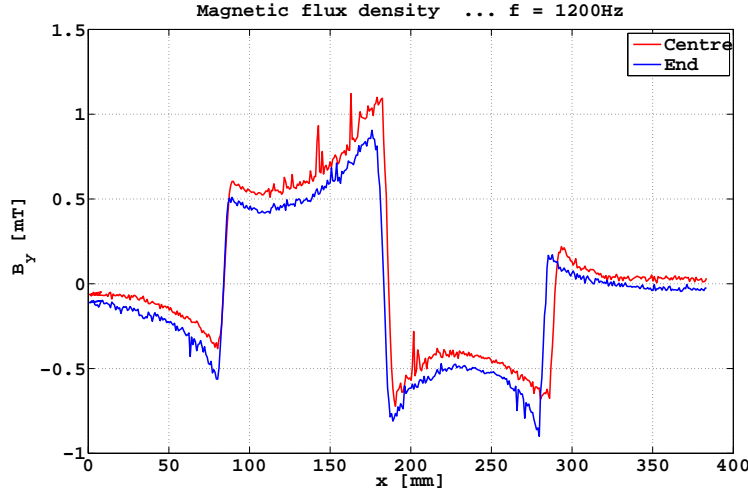
Pro svislou složku B_y magnetické indukce a tutéž frekvenci jsou výsledky na obr. 7.4.8. Poněvadž jde o svislou složku, velká magnetická indukce je v mezeře mezi vodiči a mění znaménko. Extremální hodnota je v okolí hrany středního vodiče. Průběh je antisymetrický vzhledem k rovině souměrnosti, což obr. 7.4.8 s odhlédnutím od experimentálních chyb potvrzuje. Rozdíl (ve svislém směru) pro obě polohy je opět viditelný, avšak poměrně malý.

Na obr. 7.4.7 i na obr. 7.4.8 se křivky neshodují ve vodorovném směru. Odchylka vzrůstá s rostoucí vzdáleností od počátku měření. To lze vysvětlit tím, že vodiče nejsou přesně rovnoběžné. U napájení je jejich rozteč poněkud menší. Z podrobnějších grafů by bylo možné zjistit tuto změnu.



Obrázek 7.4.8: Svislá složka magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 45 Hz

Pro srovnání je na obr. 7.4.9 průběh svislé složky magnetické indukce při nejvyšší frekvenci. Opět je zde zřetelný posun mezi hodnotami uprostřed tyče na blízko zdrojů. V porovnání s obr. 7.4.8 jsou hodnoty pro nejvyšší frekvenci zhruba desetkrát nižší. Posuv hodnot opět není dramatický. Přitom se jedná o vysokou frekvenci, kde by se zejména vliv transformátorů mohl zřetelně uplatnit.

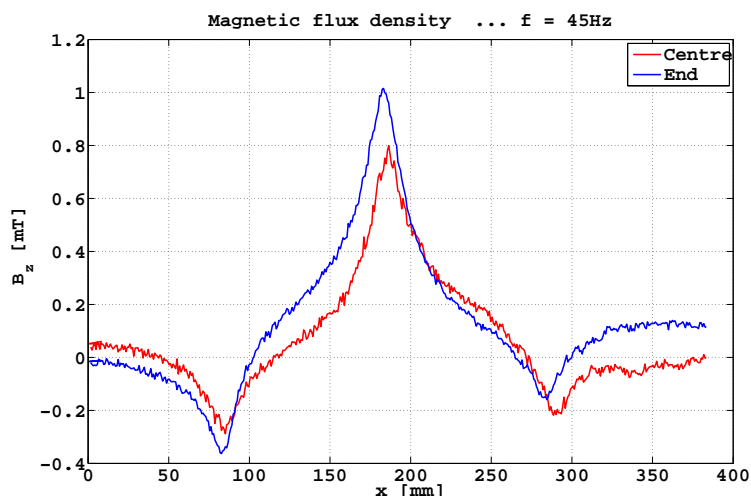


Obrázek 7.4.9: Svislá složka magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 1200 Hz

V teorii i výpočtech jsme ukázali, že axiální složka magnetické indukce B_z musí být nulová. Výsledek měření této složky³ pro dvě polohy je na obr. 7.4.10. Axiální složka je menší než ostatní složky, je zatížena větší relativní experimentální chybou, ale i přes tuto chybu, není nulová. Blízko zdrojů by se její existence dala vysvětlit přítomností proudů, které tekou zhruba kolmo k masivním vodičům v jejich přívodu. Dále zde působí rozptylové magnetické pole výkonových transformátorů. K našemu překvapení je však zhruba stejná i ve střední poloze, ve vzdálenosti více než 1 m od předpokládaných zdrojů, které ji budí. V této vzdálenosti by měl být příspěvek od přívodů a transformátorů zanedbatelný. Její

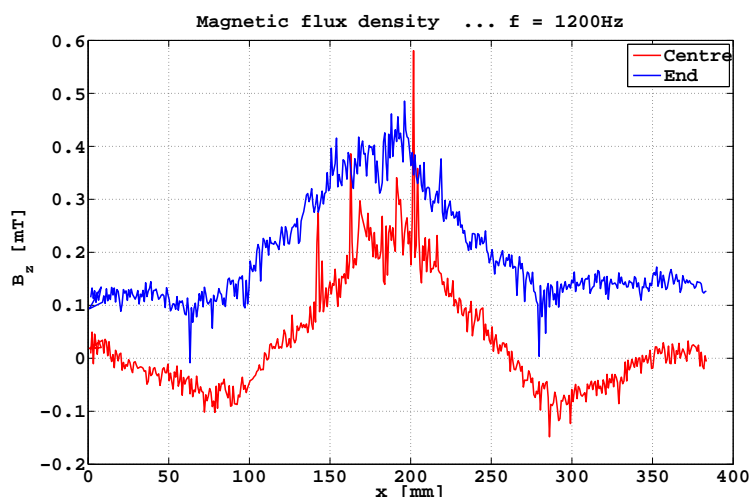
³O této skutečnosti jsme se zmínili již při popisu obr. 7.4.3.

příčinu je nutno hledat jinde.



Obrázek 7.4.10: Podélná (axiální) složka magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 45 Hz

Průběh axiální složky magnetické indukce při nejvyšší frekvenci je na obr. 7.4.11. Je vidět velký vliv poruch a šumu, jelikož budící proud je malý a magnetické pole slabé⁴. Hodnoty magnetické indukce oproti obr. 7.4.10, který je pro frekvenci více jak o řád nižší, jsou zhruba poloviční. Absolutní rozdíl mezi nimi je však vyšší. Pokus o vysvětlení je v další části.



Obrázek 7.4.11: Podélná (axiální) složka magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 1200 Hz

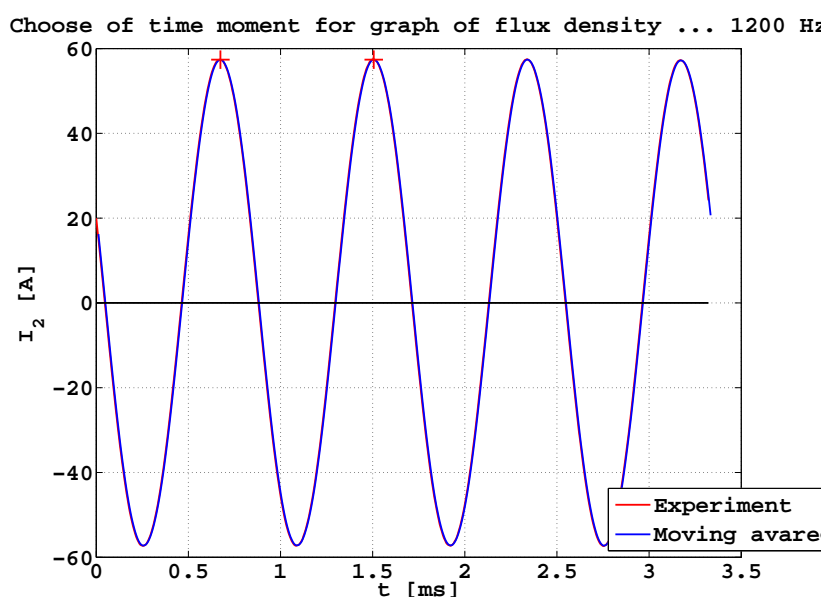
7.4.3 Vířivé proudy

Pokud je ve třívodičové soustavě přímých vodičů buzen jednofázově jen střední vodič, krajními vodiči teče v ideálním případě poloviční zpětný proud s opačnou fází. Ten ve středním vodiči indukuje vířivé proudy. Naopak proud ve středním vodiči indukuje vířivé

⁴O tom jsme se už zmínili několikrát.

proudy v krajních vodičích. Vířivé proudy se skládají s proudy vnucenými. Magnetické pole vně vodičů je důsledkem superpozice obou proudů. Vířivé proudy jsou maximální, pokud budící proud prochází nulou. Jsou nulové, pokud budící proud prochází lokálním extrémem (maximem či minimem).

Úroveň indukovaných vířivých proudů tedy závisí na fázové konstantě budícího proudu. Pokud je nulová, budící proud se mění nejrychleji a indukované proudy jsou maximální. S jejím růstem úroveň vířivých proudů klesá a při fázové konstantě rovné 90° je jejich úroveň teoreticky nulová, poněvadž se budící proud v tomto okamžiku nemění. To by se mělo projevit v experimentálních datech, pokud budeme volit různě časový okamžik, či fázovou konstantu i pro výběr vzorků. Příklad speciální volby fázové konstanty je na obr. 7.4.6, kde je fázová konstanta nulová. Pro fázovou konstantu 90° je volba časového okamžiku, či indexu v datech, vysvětlena na obr. 7.4.12. Analogicky lze znázornit i obecnou volbu fázové konstanty.

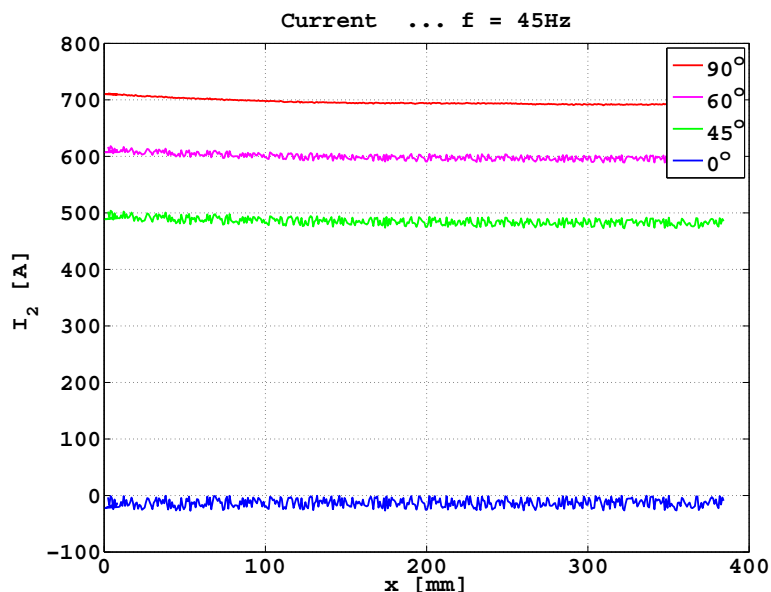


Obrázek 7.4.12: Referenční časový okamžik pro fázovou konstantu 90° při frekvenci 1200 Hz

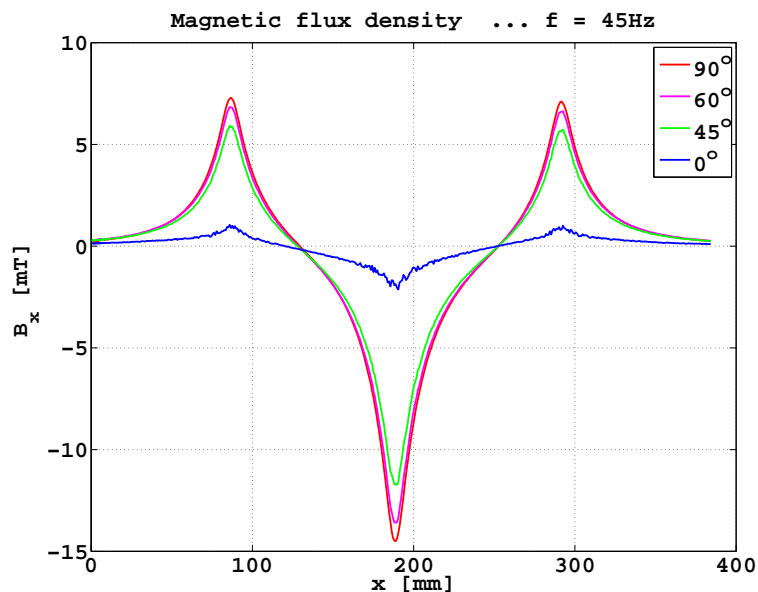
Pro posouzení průběhu magnetické indukce v závislosti na fázové konstantě je důležitá znalost budícího proudu pro jednotlivé měřené polohy sondy. Tento průběh je pro měřící dráhu při frekvenci 45 Hz na obr. 7.4.13. Parametrem je fázová konstanta. Z obr. 7.4.13 je zřejmé, že čím je hodnota budícího proudu nižší, tím je více zašuměn. Nulové fázové konstantě neodpovídá přesně nulový budící proud, přesněji budící proud o nulové střední hodnotě, ale malý proud opačného směru. To je způsobeno nízkou frekvencí vzorkování, jak jsme se o tom zmínili na konci části 7.4.1.

Průběh vodorovné složky magnetické indukce B_x na měřené dráze pro různé fázové konstanty jako parametr při frekvenci 45 Hz je na obr. 7.4.14. Hodnota složky magnetické indukce je nízká pro nulovou fázovou konstantu a velká pro fázové konstanty nad 45° . Srovnáním s obr. 7.4.13 lze říci, že magnetická indukce je úměrná budícímu proudu. To neplatí přesně pro nulovou fázovou konstantu, zde by možná měla být magnetická indukce nižší.

Průběh svislé složky magnetické indukce B_y na měřené dráze pro tytéž hodnoty fázové konstanty a při téže frekvenci je na obr. 7.4.15. Opět překvapuje poměrně vysoká hodnota této složky pro opravdu nízký budící proud.



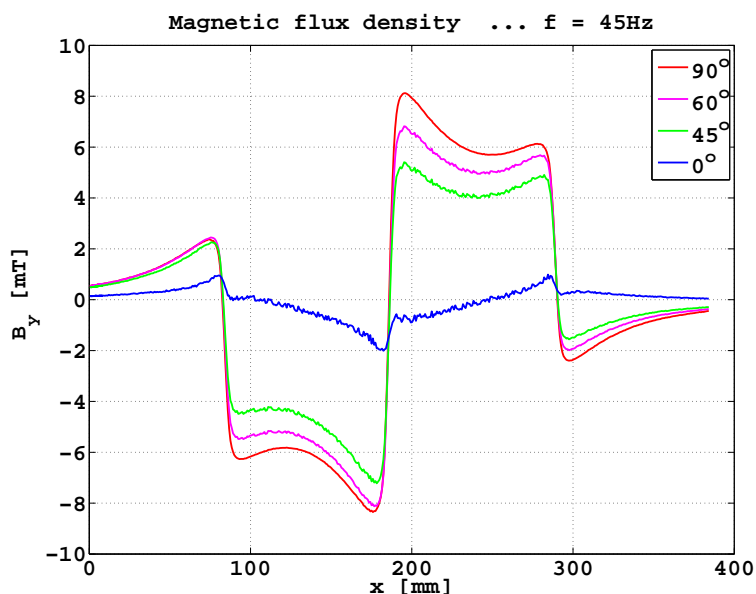
Obrázek 7.4.13: Fázové proudy pro různé časové konstanty při frekvenci 45 Hz



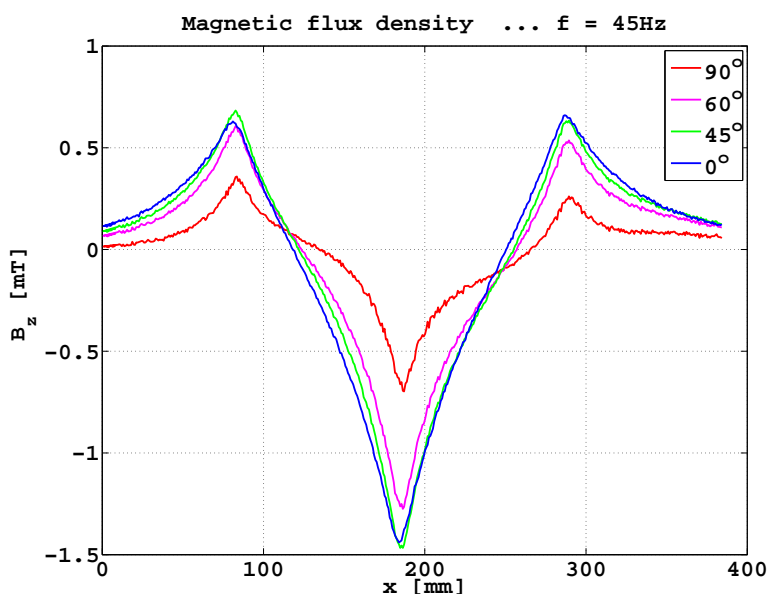
Obrázek 7.4.14: Vodorovná složka magnetické indukce pro různé fázové konstanty při frekvenci 45 Hz

Průběh axiální (podélné) složky magnetické indukce B_z za stejných podmínek (tytéž hodnoty fázové konstanty a tatáž frekvence) je na obr. 7.4.16. Tento průběh je zdánlivě v rozporu s očekávanými výsledky. V první řadě by tato složka neměla existovat. Za druhé její závislost na budícím proudu (obr. 7.4.13) je opačná. Při nejvyšším budícím proudu je buzené magnetické pole nejslabší a při nejnižším buzení naopak nejsilnější.

Tento zdánlivý paradox lze vysvětlit tím, že magnetické pole s touto složkou je prakticky buzeno vířivými proudy. Při fázové konstantě 90° vířivé proudy jsou prakticky nulové, axiální složka je buzena jen vnučenými proudy, a proto je nejnižší. Při fázové konstantě 0° jsou vířivé proudy nejsilnější a magnetická indukce je prakticky buzena jen jimi, proto je nejvyšší.



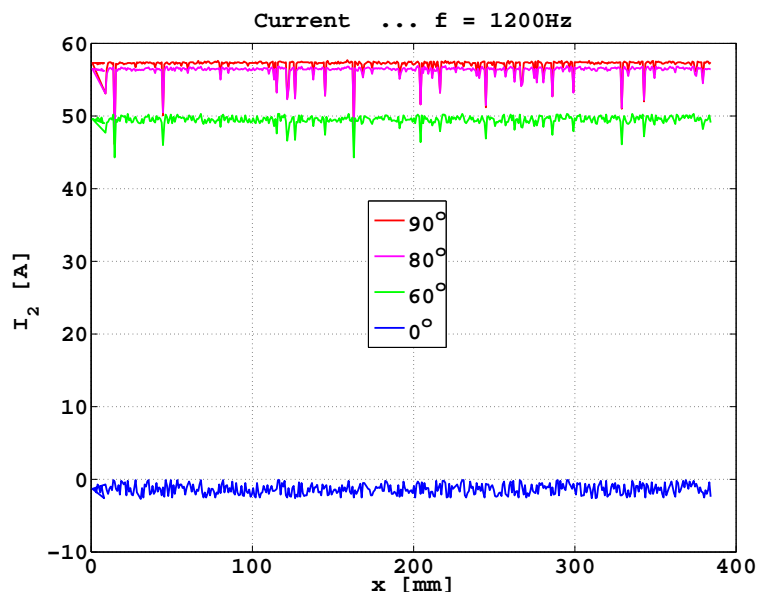
Obrázek 7.4.15: Svislá složka magnetické indukce pro různé fázové konstanty při frekvenci 45 Hz



Obrázek 7.4.16: Podélná (axiální) složka magnetické indukce pro různé fázové konstanty při frekvenci 45 Hz

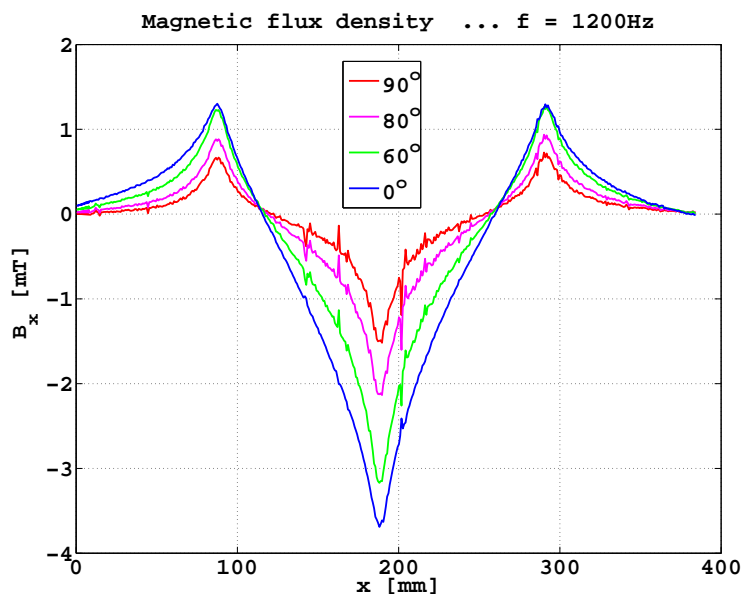
Všechny tyto jevy jsou daleko výraznější při nejvyšší budící frekvenci 1200 Hz. Budící proud při této frekvenci pro vhodně zvolené hodnoty fázové konstanty jako parametr je na obr. 7.4.17. Pro vysoké hodnoty fázové konstanty se hodnoty budícího proudu liší poměrně málo.

Průběh vodorovné složky magnetické indukce B_x pro tento případ (budící frekvence 1200 Hz) je na obr. 7.4.18. Obecně lze říci, že hodnoty této složky magnetické indukce jsou nepřímo úměrné budícímu proudu. Při nejvyšším budícím proudu je magnetická indukce nejnižší a při nejnižším buzení je paradoxně nejvyšší. Pokud bereme za fakt, že se na



Obrázek 7.4.17: Fázové proudy pro různé časové konstanty při frekvenci 1200 Hz

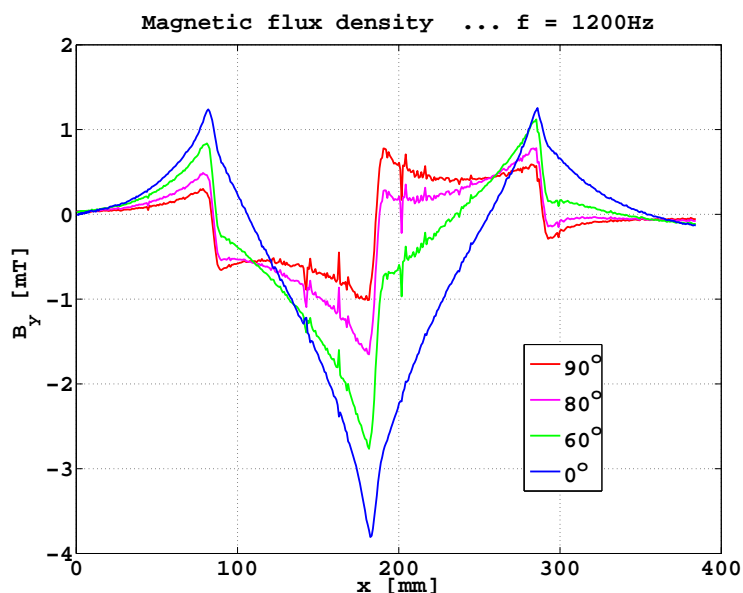
výsledném magnetickém poli podílí též magnetické pole vyvolané vířivými proudy, tak je vše v pořádku. Při fázové konstantě 90° jsou vířivé proudy teoreticky nulové a magnetické pole je buzeno jen proudy vtištěnými. Jeho indukce je nejnižší. S poklesem fázové konstanty se stále více na výsledném magnetickém poli podílí vířivé proudy a jeho indukce stoupá. Při nulové fázové konstantě je pak maximální.



Obrázek 7.4.18: Vodorovná složka magnetické indukce pro různé fázové konstanty při frekvenci 1200 Hz

Průběh svislé složky magnetické indukce B_y na měřené dráze pro tytéž hodnoty fázové konstanty a při téže frekvenci 1200 Hz je na obr. 7.4.19. Zde je vliv vířivých proudů ještě zajímavější. Porovnejme tento obrázek s obrázkem 7.4.15, který se liší jen nízkou frekvencí 45 Hz. Při fázové konstantě 90° jsou oba průběhy velmi podobné, vliv vířivých proudů je

malý i při nejvyšší frekvenci. Jakmile se ale fázová konstanta poměrně málo sníží, podle obr. 7.4.19 na 80° , průběh svislé složky magnetické indukce se vířivými proudy výrazně deformuje. Tato deformace se zvyšuje s dalším poklesem fázové konstanty, takže původní průběh se hledá stále obtížněji. Na druhé straně i při nulové hodnotě fázové konstanty lze nalézt příspěvek od budícího proudu (dosti strmé úseky). Průběh svislé složky magnetické indukce se v tomto speciálním případě, co do tvaru, plně neshoduje s průběhem vodorovné složky na obr. 7.4.18, i když se mu dosti podobá.



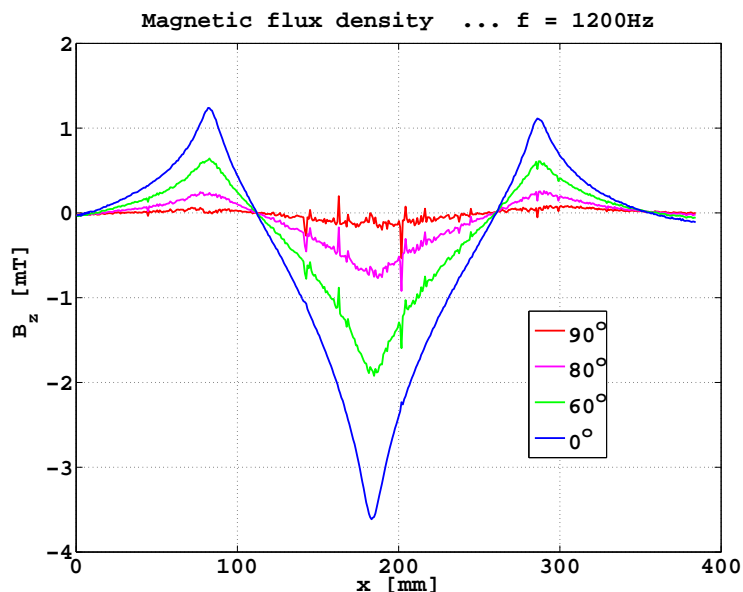
Obrázek 7.4.19: Svislá složka magnetické indukce pro různé fázové konstanty při frekvenci 1200 Hz.

Průběh axiální (podélné) složky magnetické indukce B_z pro tytéž hodnoty fázové konstanty a při vysoké frekvenci 1200 Hz je na obr. 7.4.20. Tvarem se křivky pro nízkou, zejména nulovou, fázovou konstantu neliší od křivek pro nízkou frekvenci 45 Hz na obr. 7.4.16. Hodnoty magnetické indukce jsou ale vyšší, i když je budící proud o řád nižší. To lze opět vysvětlit tím, že se jedná o magnetické pole buzené v podstatě pouze vířivými proudy. S rostoucí frekvencí jsou časové změny budícího proudu stále vyšší a indukované proudy stále silnější. To se projeví i na indukci magnetického pole, které budí. Výrazný vliv vířivých proudů potvrzuje i skutečnost, že i v tomto případě hodnoty magnetické indukce pro fázovou konstantu 90° jsou malé.

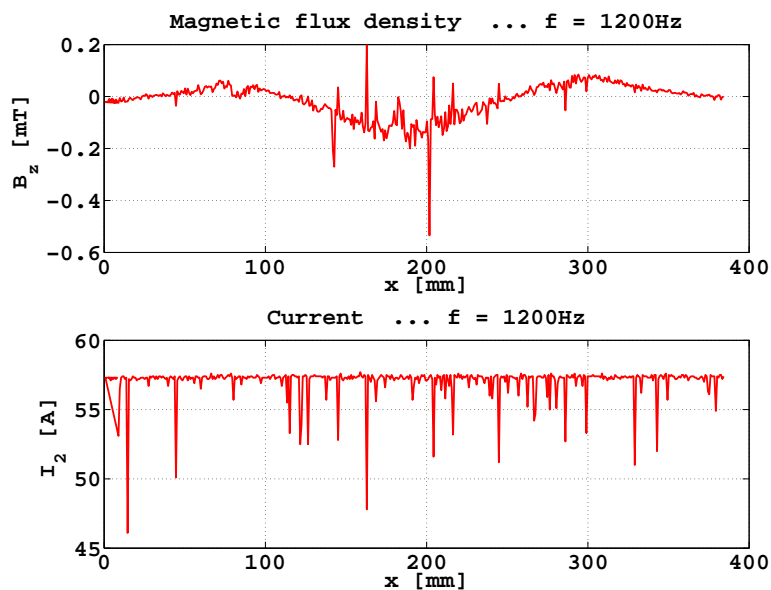
Všechny průběhy magnetické indukce pro frekvenci 1200 Hz (obr. 7.4.18, 7.4.19, 7.4.20) obsahují výrazné poruchy, které spolu navzájem korelují. Ani budící proud na obr. 7.4.17 není konstantní, často se objevuje ostrý pokles hodnoty až o 10 procent. Je otázkou, zda spolu korelují i poruchy magnetické indukce a náhlé poklesy proudu. Porovnání je na obr. 7.4.21. Ve střední části jsou změny na obou průbězích blízko sebe. Ale v tomto případě někdy nesouhlasí znaménko. Korelaci mezi změnami budícího proudu a poruchami magnetické indukce se nepodařilo prokázat.

7.4.4 Porovnání s experimentem

Jelikož teoreticky umíme započít jen vliv skin efektu, můžeme porovnávat vypočtené průběhy magnetické indukce s naměřenými jen pro fázovou konstantu 90° . Porovnání pro podélnou



Obrázek 7.4.20: Podélná (axiální) složka magnetické indukce pro různé fázové konstanty při frekvenci 1200 Hz

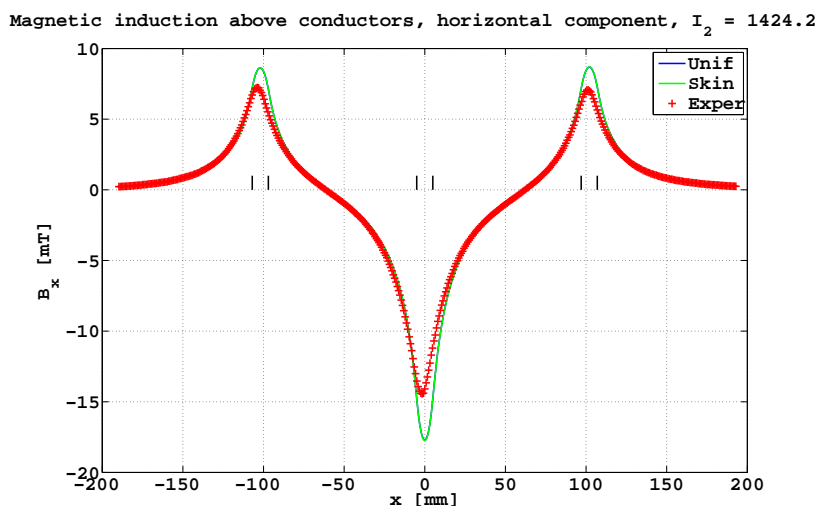


Obrázek 7.4.21: Možná korelace mezi budícím proudem a axiální složkou magnetické indukce při frekvenci 1200 Hz

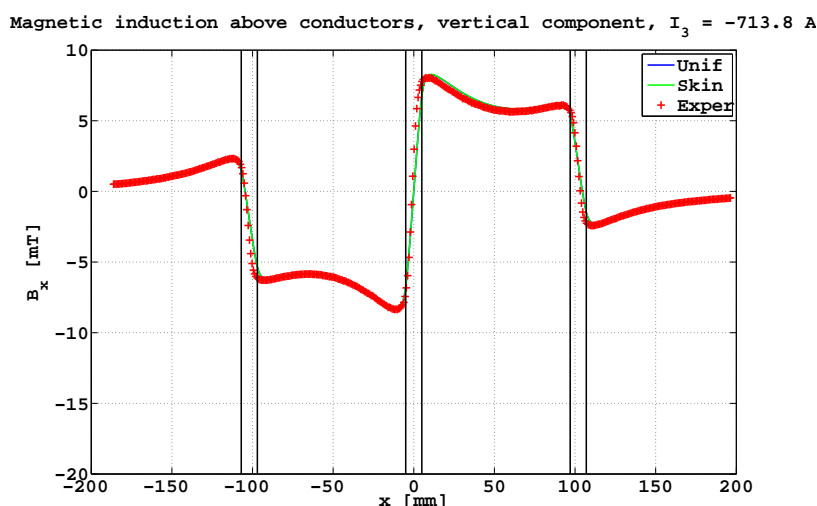
složku B_x pro nízkou frekvenci 45 Hz je na obr. 7.4.22 a pro svislou složku B_y při téže frekvenci 45 Hz na obr. 7.4.23.

Na těchto obrázcích 7.4.22 a 7.4.23 je naznačena poloha vodičů krátkými nebo dlouhými svislými čarami. Jsou zde dva grafické průběhy. Jednak je to vypočtená teoretická hodnota magnetické indukce pro rovnoměrné rozložení proudu ve vodiči (stejnoseměrný proud), jednak pro průchod střídavého proudu při frekvenci 45 Hz. Skinefekt se prakticky neuplatní, obě křivky jsou téměř totožné. Experimentální výsledky jsou ve formě bodů.

Pro vodorovnou složku B_x na obr. 7.4.22 je souhlas dobrý s výjimkou krátké oblasti nad



Obrázek 7.4.22: Porovnání teorie a experimentu pro vodorovnou složku magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 45 Hz



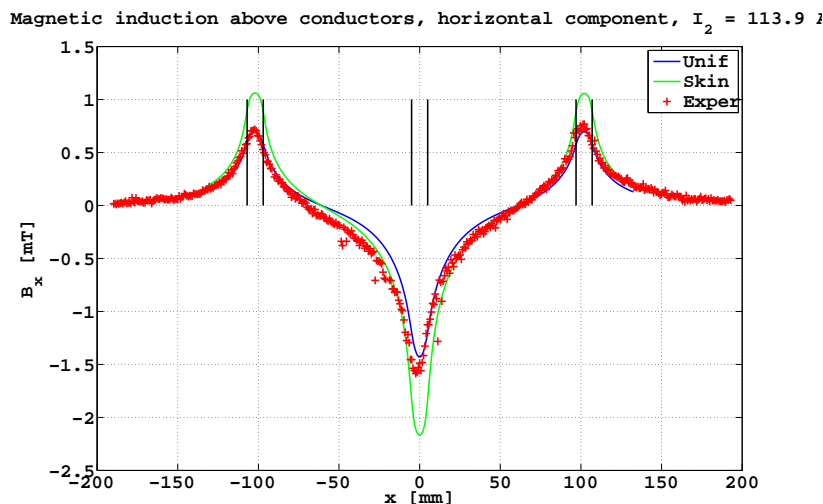
Obrázek 7.4.23: Porovnání teorie a experimentu pro svislou složku magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 45 Hz

vodiči. Zde je naměřená hodnota nižší. To lze částečně vysvětlit průměrujícím účinkem čidla v Hallově sondě, které má sice malé, ale konečné rozměry. Magnetická indukce se v těchto místech mění poměrně rychle. Kromě toho nemusí být přesně provedena korekce na polohu čidla v pouzdře sondy.

Pokud jde o svislou složku B_y na obr. 7.4.23, je souhlas dobrý v celé měřené oblasti. Pro nízké frekvence tedy dostáváme dobrý souhlas mezi teorií a experimentem. Zde se ovšem neprojevuje skinefekt a vířivé proudy jsou slabé.

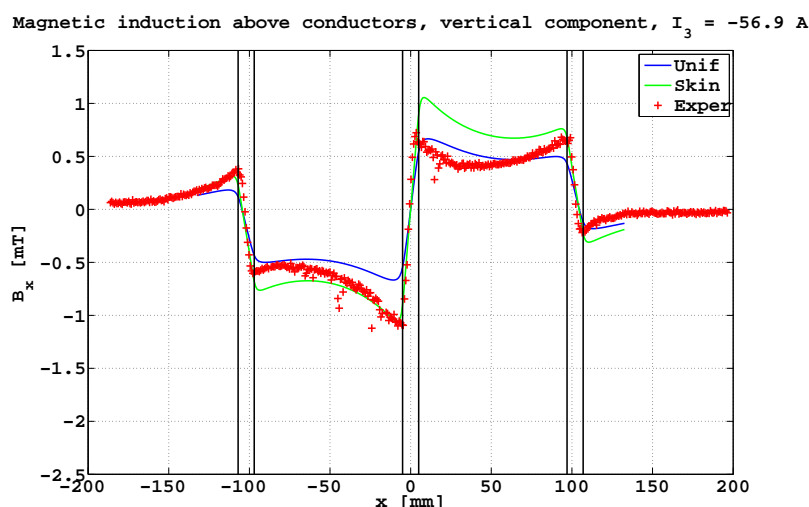
Porovnání pro obě složky při nejvyšší frekvenci 1200 Hz je na obr. 7.4.24 pro vodorovnou složku B_x a na obr. 7.4.25 pro svislou složku B_y . Na teoretických křivkách se skinefekt nyní projevuje, magnetická indukce je v absolutní hodnotě vyšší, poněvadž proud teče v blízkosti povrchu vodiče.

Pokud jde souhlas pro vodorovnou složku B_x na obr. 7.4.24, teoretické křivky se liší jen v oblastech nad vodiči a zde není souhlas s experimentem ani při nízkých frekvencích, viz



Obrázek 7.4.24: Porovnání teorie a experimentu pro vodorovnou složku magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 1200 Hz

obr. 7.4.22. Proto nemůžeme učinit žádný závěr.



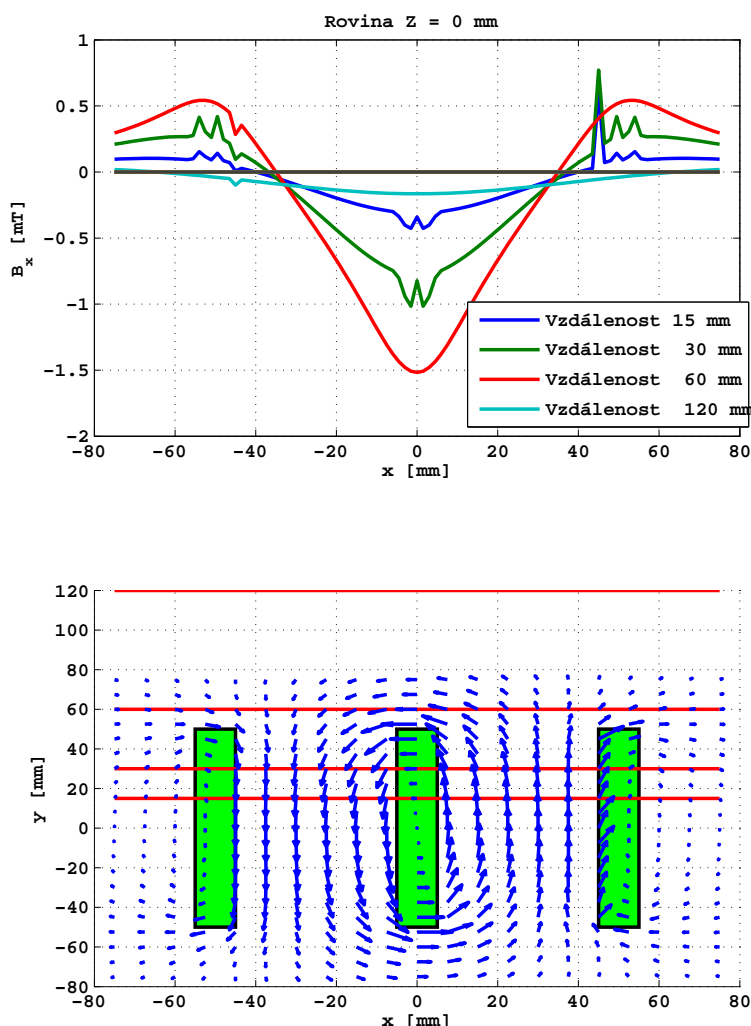
Obrázek 7.4.25: Porovnání teorie a experimentu pro svislou složku magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 1200 Hz

Pro svislou složku B_y na obr. 7.4.25 se obě teoretické křivky liší v celé oblasti, nikoliv však nijak výrazně. Experimentální body nejsou, na rozdíl od teoretických křivek, rozloženy antisymetricky a navíc zatíženy značným šumem. Odchylka od antisymetrického rozložení však může být způsobena slabými vířivými proudy. V levé části jsou blíže křivce pro skinefekt, v pravé pro rovnoměrně rozložený proud. V důsledku malé přesnosti experimentu se skinefekt nedá jednoznačně experimentálně prokázat. Chyba ale může být i v teorii, která neuvažuje, přesněji nedokáže zahrnout, vliv vířivých proudů.

7.5 Trojfázové magnetické pole

Ověrovací experimenty jsme provedli měřením magnetického pole při napájení všech tří přímých vodičů ze symetrické trojfázové soustavy. Měření však byla provedena na kratším posuvu, takže nezahrnula oblast nad všemi třemi vodiči, ale pouze nad prostředním, navíc nesymetricky. Dobrý souhlas mezi teorií a experimentem byl jen pro nejnižší frekvence. Důvodem byly vířivé proudy. Proto jsme vzápětí přešli na měření s delším posuvem a s jednou aktivní fází. Tomu je věnována rozsáhlá předchozí část 7.4.

V oblasti trojfázového magnetického pole jsme však provedli řadu výpočtů s cílem seznámit se podrobně s jeho průběhem. K tomu sloužily obrázky s vektorovým průběhem a parametrickým zobrazením složek na zvolených řezech. Příklad je na obr. 7.5.1. V dolní části jsou vektory magnetické indukce. Dále jsou v této oblasti naznačeny řezy. Pro tyto řezy se pak v horní části zobrazí průběhy zvolené složky, tedy parametrické grafy. Na tomto obrázku to je vodorovná složka B_x magnetické indukce.

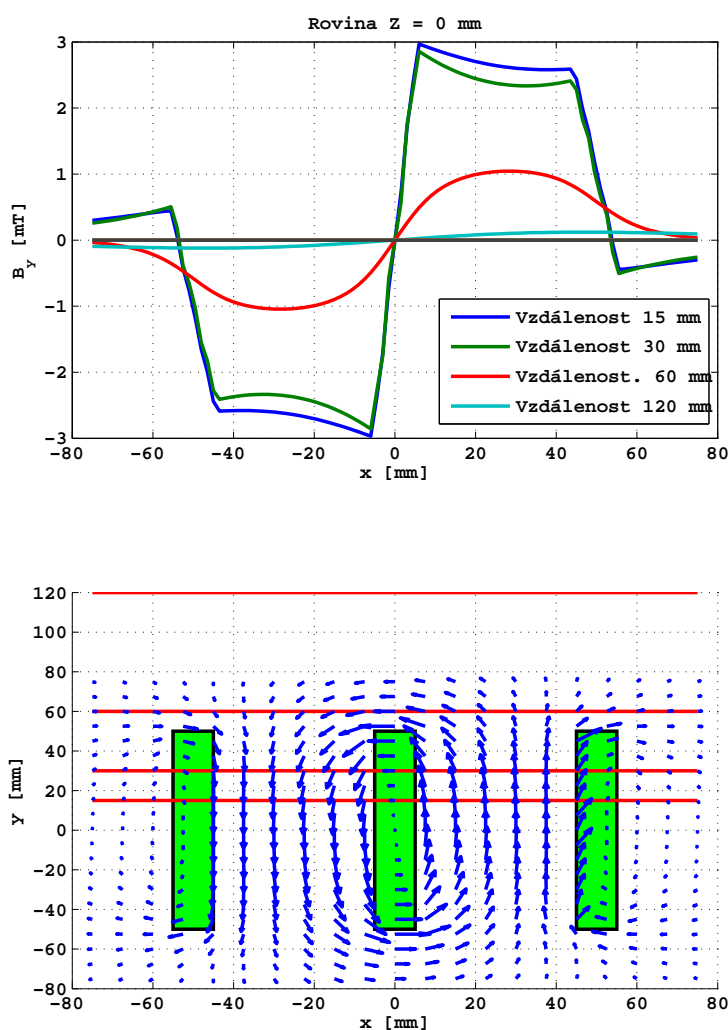


Obrázek 7.5.1: Vodorovná složka magnetického pole v oblasti tří vodičů při buzení z trojfázové sítě

Řezy na obr. 7.5.1 procházejí i vodiči. Pokud se má uvnitř nebo na povrchu vodiče

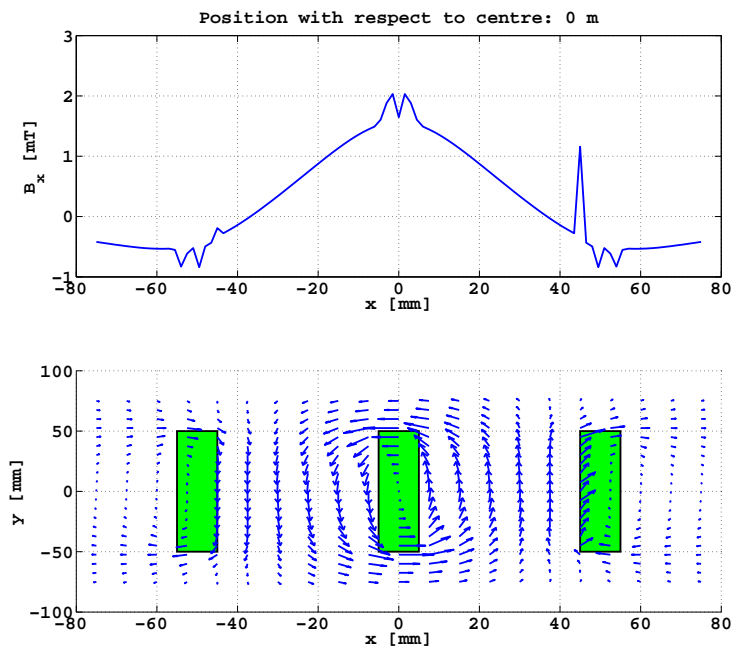
vypočíst spolehlivě složka magnetické indukce je nutno se vyhnout singularitám. V prvním přiblížení to znamená vzít při numerické integraci daleko více elementů, než pro obdobný případ vně vodiče, kde k singularitě nedochází. Jelikož byl použit standardní počet bodů odzkoušený pro výpočet vně vodiče, dochází k chybám. Ty jsou na parametrických křivkách viditelné.

Průběh svislé složky B_y magnetické indukce v těchto řezech je na obr. 7.5.2. V tomto případě je numerická integrace vyhovující, k chybám nedochází ani pro výpočet uvnitř vodičů nebo na jejich povrchu. Magnetická indukce se uvnitř vodiče mění lineárně a mezi vodiči je v prvním hrubém přiblížení konstantní.

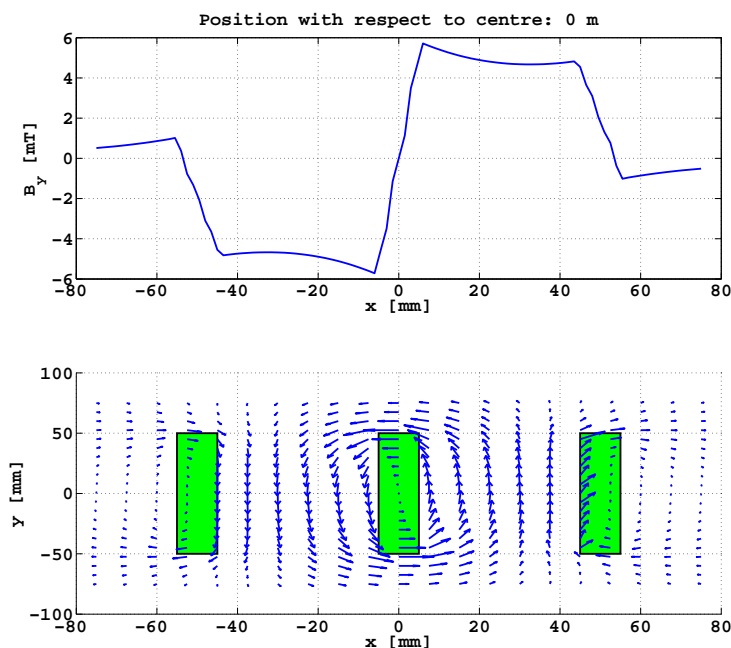


Obrázek 7.5.2: Svislá složka magnetické indukce v oblasti tří vodičů napájených trojfázově

Této možnosti jsme využili k simulaci časového průběhu vektoru magnetické indukce a jeho jednotlivých složek. Snímky pro nulový čas jsou na obr. 7.5.3 pro vodorovnou složku a na obr. 7.5.4 pro svislou složku. Postupně jsou snímky připraveny pro nárůst fáze po 1° . Grafy na snímcích 7.5.3 a 7.5.4 jsou pro vodorovnou osu, která prochází vodiči a tím pádem jsou na grafickém průběhu vodorovné složky (obr. 7.5.3) známé chyby. Svislá složka na obr. 7.5.4 je bez problémů.



Obrázek 7.5.3: Simulace časových změn magnetického pole — vodorovná složka

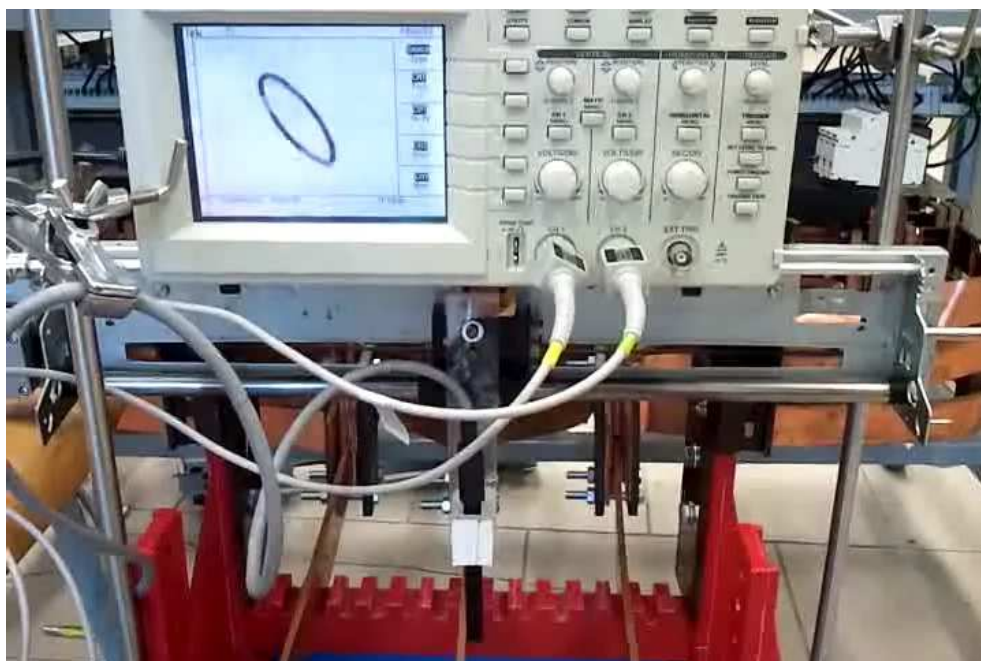


Obrázek 7.5.4: Simulace časových změn magnetického pole — svislá složka

Pozdější simulace byla provedena pro vodorovnou úsečku těsně nad vodiči, po které se také pohybuje 3D Hallova sonda. Pak je simulace bez problémů. Lze ji nalézt, mezi dalšími simulacemi, na doprovodném CD.

Simulace ukázala, že každý vektor magnetické indukce opisuje elipsu. V prostoru mezi třífázovými vodiči je tedy točivé magnetické pole. Toto točivé magnetické pole jsme experimentálně prokázali. Napětí z výstupu 3D Hallové sondy odpovídající složkám B_x a B_y

magnetické indukce jsme přivedli na vstupy osciloskopu a vypnuli časovou základnu. Použili jsme nízkou frekvenci 45 Hz, což umožnilo vybudit relativně silné magnetické pole. Na displeji osciloskopu se objevila zašuměná elipsa, viz obr.7.5.5 . Při pohybu sondy se měnila její velikost i orientace. I toto video je na doprovodném CD.



Obrázek 7.5.5: Experimentální ověření točivého magnetického pole.

Kapitola 8

Diskuse

Některé výsledky, postupy, či odvození již byly částečně diskutovány v příslušných kapitolách, proto se zde soustředíme především na posouzení klíčových částí disertace. Bude se týkat použitých předpokladů, postupů, řešení, získaných výsledků apod.

V teoretické části jsme nejprve vysvětlili použitou terminologii. Vysvětlili jsme proč povrchové jevy v elektromagnetismu pracovně dělíme na vířivé proudy a skin efekt. Tato terminologie asi není nejvhodnější, ale nepodařilo se nám najít vhodnější a alespoň trochu vžitá termíny.

Teoretická kapitola se na začátku poměrně podrobně zabývá analytickým řešením povrchových jevů pro nejjednodušší případy, poloprostor a vrstvu. Tato řešení jsou v rozsáhlejších monografiích, ale obvykle nejsou kompletní, nejspíše z důvodu úspory místa. Omezují se zpravidla jen na průběh proudové hustoty. Zde jsme, jak v případě skin efektu, tak vířivých proudů, podali řešení pro všechny složky elektromagnetického pole. Již v případě vrstvy, což může být v technické praxi první model vodivého pásu, jsme ukázali základní rysy skin efektu. Zejména je to oscilující pokles proudové hustoty směrem do prostředí, který vede k tomu, že ve vnitřní části vrstvy může malý proud téci proti vtištěnému elektrickému poli. V běžné technické literatuře je skin efekt popsán pro praxi vyhovujícím způsobem, nicméně z hlediska fyzikálního i elektrotechnického jsou opomíjeny jeho zajímavé a neočekávané vlastnosti.

V části pojednávající o vířivých proudech v poloprostoru jsme zjistili, že při různých odvozeních docházíme k různým znaménkům vířivých proudů, tedy k opačné fázi. Zde je nutno zvážit, co je podnětem a co je odezvou. Při aplikaci Faradayova zákona elektromagnetické indukce, časově proměnné magnetické pole budí indukované vířivé proudy. Naopak při aplikaci Ampérova zákona vířivé proudy budí magnetické pole. Mají tedy funkci vtištěných proudů. V reálné situaci dochází k oběma jevům současně, aby magnetické pole neustále existovalo, musí být odněkud buzeno a to vtištěnými vířivými proudy, které musí být v opačné fázi k indukovaným. Analogický případ je u ideální cívky. Vtištěné napětí musí mít v každém okamžiku opačné znaménko k indukovanému, aby je vyrušilo a tím zajistilo proud v cívce.

V teoretické části se zabýváme odvozením přibližného analytického vztahu pro skin efekt v nekonečné tyči obdélníkového profilu. Proud teče ve směru její osy Z . Při tomto odvození jsou diskutabilní okrajové podmínky. Pro jednoduchost jsme předpokládali, že proudová hustota je konstantní na povrchu tyče. Jinak bychom asi nedospěli k jednoduchému analytickému řešení. Toto řešení se skládá ze tří členů: jeden nelineární člen obsahuje součin hyperbolických funkcí proměnné x a y . Další dva členy obsahují jen samostatnou hyperbolickou funkci proměnné x a analogicky umístěnou hyperbolickou funkci proměnné y .

Předpoklad konstantního povrchového proudu je splněn na nekonečné tyči kruhového průřezu a to z důvodu válcové symetrie. Platí samozřejmě i pro případ stejnosměrného

proudu. Tedy tento předpoklad určitě přibližně platí pro nízké frekvence. Otázkou však zůstává, kde je přijatelná hranice.

Řešení pro harmonický budící proud obsahuje komplexní útlumovou konstantu a tedy je též komplexní. Zprvu nás překvapila existence součinu dvou komplexních funkcí. V teorii obvodů se zdůrazňuje, že komplexní symbolická metoda platí jen pro lineární členy. Jako příklad se uvádí komplexní výkon, který nelze definovat jako součin fázoru proudu a fázoru napětí. Musí se použít komplexně sdružený fázor proudu. Pak jsme si ale uvědomili, že zde se jedná o součin komplexních funkcí bezrozměrného komplexního argumentu a nikoliv fyzikálních veličin. Můžeme tedy výsledek, proudovou hustotu a další veličiny, považovat za fázor, který je funkcí souřadnice x a y . Fyzikální význam má pak jeho reálná nebo imaginární složka, případně můžeme pracovat s jeho amplitudou a fází obdobně jako v teorii obvodů. To jsme již použili v předchozích kapitolách. Pokud však chceme počítat komplexní výkonovou hustotu, musíme použít součin fázoru intenzity elektrického pole ve vodiči a komplexně sdruženého fázoru proudové hustoty.

Pravidelnou literární rešerší jsme nedávno objevili, že asi před rokem byl na konferenci publikován příspěvek zabývající se shodným problémem [9], výpočet proudové hustoty v příčném průřezu pravoúhlé tyče, pokud se proud šíří ve směru její osy Z . Počáteční postup řešení příslušné diferenciální rovnice je shodný, ale v obecném výsledku se předpokládají dva rozdílné koeficienty v argumentu hyperbolických funkcí¹, jiný pro směr v ose X a jiný pro směr v ose Y . Mezi nimi je kvadratický vztah. V kapitole Teorie, část 3.7, jsou podrobnosti. Zde jsme také ukázali, že pro stejné koeficienty dostaneme přesně součinný člen v našem odvození. Koeficienty jsou pak útlumovými konstantami. Okrajové podmínky, rozměry příčného průřezu vodiče, lze v tomto případě přibližně započíst pro nízké frekvence tak, že se koeficienty vynásobí bezrozměrnou funkcí rozměrů vodiče.

Obě řešení tedy platí pro nízké frekvence. Alternativní řešení vede k proměnné proudové hustotě na povrchu vodiče, která má pro delší svislou stěnu docela neočekávaný průběh, jak jsme ukázali na začátku 7.1 kapitoly Výsledky. Proudová hustota na hraně je pak nespojitá, jiná je vodorovná a svislá limita po povrchu vodiče směrem k hraně. To může představovat fyzikální problém. Autor [9] je si této skutečnosti vědom.

Pokud máme porovnat oba přístupy, můžeme říci, že náš předpoklad konstantního povrchového proudu nebude platit pro vysoké frekvence. Alternativní řešení má obdobné omezení. Mezi oběma řešeními je tedy rozdíl jen v tom, do jakých frekvencí platí. To je těžké určit experimentálně.

Několikrát jsme se zmínili, že jediným jednoduchým způsobem, jak prokázat vliv skinefektu, je měření magnetického pole v okolí vodiče. Při výpočtu jsme dali přednost integrální formulaci, která má několik nesporných výhod. Především jsou automaticky splněny okrajové podmínky, zejména v nekonečnu. Výpočet lze provést jen v přesně definovaných bodech. Pro složitější tvar vodiče se použije numerická integrace. Naprogramování v MATLABu je poměrně jednoduché a snadno se odhalí případná chyba. V počáteční fázi ladění někdy na ni upozorní i interpret příkazů. Snadno se v MATLABu získají různé typy grafických výstupů – parametrický graf, rozložení vektorů, indukční čáry. Jedinou nevýhodou je pomalý výpočet, mj. proto, že MATLAB je interpretační jazyk, což je zde nevýhodou.

Výpočet se však dá urychlit paralelním zpracováním. Loňská verze MATLABu urychlí vlastní výpočet přímo úměrně počtu jader procesoru. Je nutno ale vzít v úvahu režii při přechodu na paralelní režim a návrat z něho, takže se vyplatí pro výpočty, které trvají více než minutu na procesoru, který pracuje jako jedno jádrové. I když byla tato možnost odzkoušena, nevyužili jsme jí, poněvadž numerický výpočet byl krátký díky tomu, že podstatnou část numerické integrace nahradil analytický výpočet. To však je možné jen pro přímý masivní vodič. Pro kruhový vodič se žádný analytický výraz nenalezne a integraci je

¹Nelze je považovat za útlumové konstanty, jak nás nejdříve napadlo.

nutno důsledně provádět numericky. Tím čas nutný pro výpočet stoupá.

Metoda konečných prvků má dvě nesporné výhody. První z nich je snadná formulace. V systému COMSOL, ke kterému jsme měli omezený přístup, lze vše zadat z grafického rozhraní. Další výhodou je rychlý výpočet. První výhoda se však snadno může změnit v nevýhodu, pokud provedeme při zadávání chybu. To lze velmi snadno, protože systém je proveden tak, aby výpočet prováděl podle toho, co se mu zadá. Provádí jen velmi omezenou kontrolu vstupních parametrů úlohy. Na chybu se dá přijít jen z grafického výstupu, pokud ovšem zhruba víme, jaký má být výsledek.

Dále platí, že to, co bylo výhodou v numerické integraci, je nevýhodou v metodě konečných prvků. Standardní grafický výstup metody konečných prvků je barevná mapa, ale díky skutečnosti, že COMSOL je kompatibilní s MATLABem, lze výsledky snadno převést na jinou formu, mj. parametrický graf.

Zásadní komplikace je ale s okrajovými podmínkami v nekonečnu. Obvykle se volí nulové okrajové podmínky v dostatečné vzdálenosti od sledovaného objektu. Poněvadž v blízkosti objektu elektromagnetické veličiny klesají zhruba nepřímo úměrně vzdálenosti, hranice pro výpočet by měla být ve vzdálenosti asi desetkrát větší než je typický rozměr objektu. Pak jsou s vysokou přesností okrajové podmínky pro nekonečno splněny. Systém však počítá veličiny v celé takto vymezené oblasti, i když nás zajímají jen jejich hodnoty v blízkosti objektu. Ve větší části oblasti je tedy výpočet zbytečný. Navíc v okolí objektu je mříž poměrně hrubá, takže informace, které nás zajímají, mohou být nedostatečné. Zjemňování sítě vede k prodlužování výpočtu.

Metoda konečných prvků tedy nemá takové přednosti, jak se nekriticky uvádí. Při chybném využití může vést k chybným výsledkům, které se často ověřují obtížně. Proto jsme dávali přednost jiné metodě, pokud to bylo možné. Numerická integrace však skončila u výpočtu magnetického pole ovlivněného skinefektom v tyči s pravoúhlým průřezem. Vliv vířivých proudů mohl být do této úlohy zaveden jen velmi přibližně a nepřesně. Pak nezbyvá nic jiného, než přejít k metodě konečných prvků a aplikovat ji do prostorově časové oblasti. V části Simulace uvádíme některé předběžné výsledky. Jedním z omezení bylo to, že jsme tento systém mohli v omezeném rozsahu používat na jiném pracovišti. Aplikace systému COMSOL Multiphysics ukázala nesporné výhody a proto jsme jí věnovali krátkou kapitolu, kde jsme též porovnali její výstupy s výstupy získanými klasickou cestou, ale zejména je posoudili z fyzikálního hlediska. V našich aplikacích zbývá odladit ještě drobné problémy, proto byly výsledky prezentovány jako předběžné. Pokud bude systém využíván obezřetně, bude možné jeho výstupů používat v širokém rozsahu aplikací.

Problém s okrajovými podmínkami v nekonečnu lze obejít kombinací numerické integrace a metody konečných prvků. Pak lze použít nenulové okrajové podmínky zjištěné numerickou integrací v bližší vzdálenosti od objektu. Také by se měly porovnat alespoň dílčí výsledky získané oběma metodami.

Náš přístup usilovat o analytické řešení nebo používat numerické integrace má výhody v jednoduchosti a spolehlivosti. Výsledek z analytického výrazu je jednoznačně správný, pokud respektujeme podmínky, za nichž platí. Má tedy nejen pro technickou praxi velkou cenu. U numerické integrace je k dispozici dobře odladěný skript v MATLABu specializovaný na určitý výpočet. Do něho se zadá několik přesně definovaných vstupních hodnot a výsledek se dostaví během krátkého času. I tento výsledek je spolehlivý. Metoda konečných prvků je univerzální a proto její řešení nemusí být to, co hledáme.

V experimentální části byla na začátku řešení k dispozici část aparatury obsahující tři výkonové jednofázové transformátory s připojenými masivními vodiči. Budící zdroj, měřící přístroje, Hallovu sondu atd. bylo nutno doplnit. Rovněž tak bylo nutno připravit software pro řízení a sběr dat. Připravená část aparatury byla současně výhodou i nevýhodou.

Velkou nevýhodou aparatury byl silný pokles výstupního proudu s rostoucí frekvencí.

Při nejvyšší možné frekvenci, kde se začal výrazně projevovat skinefekt, bylo proudové buzení vodičů slabé a slabé magnetické pole bylo zatíženo velkou chybou, která znemožnila přesné porovnání teorie a experimentu. Domníváme se, že chyba byla ve výkonových transformátorech, které byly asi navrženy jen pro frekvenci výkonové sítě 50 Hz. S rostoucí frekvencí přenos proudu silně klesal. Přitom by nemělo být problémem navrhnout transformátor se zhruba konstantním přenosem v pásmu do 1 kHz. Připomeňme výstupní transformátor u starých elektronkových radiopřijímačů. Ten transformoval vstupní proud řádu desítek mA z výkonové elektronky na výstupní proud v řádu ampér do cívky reproduktoru ve frekvenčním pásmu od 20 Hz do 20 kHz. Na druhé straně návrh a zejména realizace těchto transformátorů jsou finančně i časově náročné.

Alternativní řešení by bylo přejít na nižší frekvence, např. 600 Hz a použít vodič o větších rozměrech. Při zvolené poloviční frekvenci by však rozměry vodiče musely být čtyřikrát větší, což by asi nebylo realizačně snadné.

V oblasti výpočtů jsme se nesetkali s vážnými problémy. Klíčovou částí se stal algoritmus pro synchronizaci naměřených časových průběhů a vyhledání užitečného signálu v silném šumu pomocí spektrální analýzy. Všechny výpočty byly provedeny v systému MATLAB. Byla připravena řada poměrně univerzálních i specializovaných skriptů pro řešení dílčích úloh. Kde to bylo možné, snažili jsme se úlohu řešit dvěma nezávislými způsoby a tím ověřit správnost algoritmu. Skripty byly poměrně jednoduché a lze je považovat za dobře odladěné a vhodné pro rutinní aplikace. Možná, že jsme v nich nevyužili všech možností grafické prezentace výsledků.

V experimentech jsme se soustředili na experimentální ověření teoretických vztahů pro skinefekt. Ověření jsme realizovali ve dvou směrech: měření elektrického napětí na povrchu vodiče, ale zejména měření magnetického pole v jeho okolí. Brzy se ukázalo, že trojfázové buzení není vhodné, poněvadž se uplatňovaly výrazně vířivé proudy. V našich možnostech nebyla možná výrazná rekonstrukce aparatury, proto jsme střední vodič budili jednofázově. V tomto zapojení jsme provedli řadu experimentů.

Při měření úbytku napětí na povrchu vodiče jsme vypracovali metodu, jak eliminovat indukované napětí. Výsledky zprvu ukazovaly, že elektrické pole je na povrchu vodiče konstantní v souladu s našimi předpoklady. Bližší rozbor však ukázal, že jsme volili příliš velkou vzdálenost mezi sondami, 1 m. Elektrické pole na tak dlouhém úseku nemůže být homogenní. Ve skutečnosti jsme měřili odpor vodiče. Ten s rostoucí frekvencí stoupal, což lze považovat za potvrzení skinefektu. Také jsme experimentálně ukázali, že mezi budícím proudem a měřeným napětím na povrchu vodiče je fázový posuv, což se v literatuře běžně neuvádí. Tento fázový posuv s rostoucí frekvencí stoupal. Kvantitativní teoretické a experimentální výsledky však nesouhlasily. Příčinu jsme zatím nezjistili.

V principu je možné měření elektrického pole na povrchu vodiče. Vzdálenost mezi sondami však musí být malá, maximálně 10 mm. Pak je ale úbytek napětí malý a v našich podmínkách asi neměřitelný. Hlavním problémem je odstranění šumu a rušení.

Zbylo tedy jen vyhodnocení experimentů měřících vnější magnetické pole. Důležité bylo zjištění, že vodič se přibližně chová jako nekonečně dlouhý, lze tedy aplikovat teoretické vztahy. Vyhodnocením jsme z naměřených dat také zjistili, že vířivé proudy se výrazně uplatní i v zapojení s jednou aktivní fází. Na mnoha experimentálních grafech jsme ukázali, jak se vířivé proudy projeví ve vnějším magnetickém poli a jak změny průběhy magnetické indukce vyvolané vnučenými proudy. Jejich existencí lze mj. vysvětlit významnou axiální složku magnetické indukce.

Ukázali jsme také, že naše metoda výběru vzorků v okamžiku maxima budícího proudu vířivé proudy úspěšně eliminuje a je možné zkoumat skinefekt. Bohužel, při nejvyšší frekvenci byl budící proud tak malý, že se experimentálně nepodařilo jednoznačně vliv skinefektu na vnější magnetické pole prokázat.

V práci jsme se více soustředili na vyšetřování skinefektu, protože jsme chtěli ověřit odvozený analytický vztah. Také lze v tomto případě použít spolehlivou metodu numerické integrace pro výpočet magnetického pole. Experiment však jednoznačně prokázal, že klíčovou roli hrají vířivé proudy a to i při relativně nízkých frekvencích. Na rozdíl od skinefektu nemáme analytický vztah pro výčet rozložení proudů ve vodiči s pravoúhlým průřezem při působení vířivých proudů. Jediný analytický vztah je pro vrstvu. Aplikací tohoto přibližného vztahu na vodič bychom dostali přibližné řešení pro vnější magnetické pole. Z porovnání s experimentem bychom pak mohli řešení metodou pokusů a omylů zpřesňovat. Stacionární řešení by tedy bylo velmi těžkopádné, časově náročné a pomalé.

Zavedení vířivých proudů představuje tedy dynamickou úlohu. Jediným efektivním přístupem v tomto případě je použití metody konečných prvků (MKP). Musí se však k ní přistupovat obezřetně, aby nedocházelo k omylům. Zejména se musí na začátku provést důkladný rozbor úlohy a správně formulovat geometrii, parametry a okrajové podmínky. Nejprve se musí odzkoušet na případech, kde máme řešení pomocí numerické integrace.

Při aplikaci MKP na započtení vlivu vířivých proudů je nutno nezávislými přístupy zkoumat správnost výsledku. Jedním z nich je analytické řešení na velmi zjednodušeném modelu. Také lze kombinovat MKP a numerickou integraci. Pomocí MKP se vypočte rozložení proudů a numerickou integrací se zjistí vnější magnetické pole. Data získaná pomocí MKP se musí převést do přehledného tvaru, aby je bylo možné porovnat s experimentem. Jako optimální se pro tento účel jeví systém COMSOL Multiphysics, který umožňuje velmi těsnou spolupráci s MATLABem.

V této práci jsme představili některé aplikace pomocí systému COMSOL Multighysics. Jednalo se však především o prozkoumání možností tohoto systému a odzkoušení prostupu pro naši úlohu. Zde uvedené výsledky jsou jen orientační. Podrobně jsme je nezkoumali, ani nijak nezpracovali a ani je nepoužili v jiných částech práce, i když by možná vedly k názornější představě o zkoumaných jevech.

Na druhé straně naše námaha, zejména v oblasti numerické integrace, nebyla vynaložena zbytečně. Teorie i experiment potvrzují, že na aparatuře se vířivé proudy a skinefekt začaly výrazně projevovat až při frekvenci nad 400 Hz. To znamená, že pro síťovou frekvenci 50 Hz lze používat integrální přístup k výpočtu magnetického pole s rovnoměrně rozloženou proudovou hustotou. Vliv vířivých proudů za těchto frekvencí je jen malou opravou k výsledkům či k vysvětlení, proč se mírně liší teorie a experiment.

Kapitola 9

Závěr

V závěru nejprve shrneme, co se při řešení zadaného problému podařilo vykonat. Pak porovnáme dosažené výsledky s vytčenými cíli. Nakonec naznačíme, kudy by se další řešení mohlo či mělo ubírat.

Tato převážně experimentální práce se zabývá studiem kvazistacionárního elektromagnetického pole v experimentálním modelu rozvodny. V teoretické části se soustředila na rozbor působení skinefektu a vířivých proudů. Pro použité vodiče byl nalezen přibližný analytický výraz pro skinefekt. Ten se poněkud lišil od vztahu nedávno publikovaného pro tentýž typ vodiče. Pro vířivé proudy asi podobný jednoduchý vztah neexistuje, poněvadž jde již o příliš složitý systém. Poněvadž jediné snadné ověření předpokládaného rozložení proudu ve vodiči je vnější magnetické pole, byly připraveny metody pro jeho rychlý výpočet numerickou integrací.

Experiment se soustředil převážně na měření vnějšího magnetického pole. Hlavním nedostatkem aparatury bylo poměrně slabé proudové buzení při frekvencích, kde se skinefekt projevoval nejvíce. Přičítáme je nevhodně navrženým transformátorům. Na druhé straně se nám úpravou elektronického obvodu podařilo zvýšit citlivost a přesnost měření slabých magnetických polí komerční 3D Hallovo sondou. Práce se také zabývala měřením úbytku napětí na povrchu vodiče s cílem ověřit okrajové podmínky použité při odvození analytického výrazu pro skinefekt. Při vhodné rozteči sond však bylo toto napětí příliš malé na to, aby se dalo změřit s přijatelnou chybou. Ověřili jsme však, že odpor vodiče s rostoucí frekvencí stoupá. Také jsme zjistili fázový posuv mezi napětím na povrchu a budícím proudem a to jak experimentálně tak teoreticky. Tato skutečnost se v literatuře běžně neuvádí.

Studium vnějšího magnetického pole se soustředilo na režim s jednou aktivní fází. Magnetické pole bylo slabé zejména při vyšších frekvencích, proto jsme pro odstranění poruch z naměřených dat použili frekvenční analýzu. V naměřených průbězích magnetické indukce se výrazně projevoval vliv vířivých proudů i v tomto zjednodušeném zapojení. Jejich vliv na průběh magnetického pole je také při systematickém vyhodnocování experimentu v práci podrobně popsán. Vhodným výběrem vzorků v časové oblasti jsme dokázali vliv vířivých proudů podstatně potlačit a tak získat experimentální data, která zahrnují jen vliv skinefektu. Bohužel, v důsledku slabých budících proudů jsou data zatížena značnou chybou, takže se vliv skinefektu nepodařilo jednoznačně prokázat ani v tomto případě. Nešlo tudíž ani posoudit, které z teorií je experiment blíže. Postup je však správný, jde jen o odstranitelný technický nedostatek.

Praktickým výsledkem je mimo jiné to, že jsme ukázali, že pro frekvence asi do 300 Hz je vliv vířivých proudů při použité geometrii slabý. Lze tedy použít všech metod numerické integrace pro sledování vnějších magnetických polí. Rozložení proudů ve vodiči lze považovat za rovnoměrné.

Pokud se jedná o vytčené cíle, lze je pokládat za splněné, i když někdy byly výsledky

trochu jiné, než se očekávalo. Pokud nedošlo k očekávanému výsledku, provedli jsme fyzikální a technický rozbor úlohy a obvykle se nám podařilo uspokojivě vysvětlit příčinu nesouhlasu a navrhnout jiné řešení. Pouze v případě měření napětí na povrchu vodiče jsme nebyli úspěšní. Z časových důvodů jsme se nemohli podrobně ani experimentálně, ani teoreticky, zabývat oteplováním vodičů, i když je to pro praxi důležité a v literatuře se to sleduje.

Práce řeší aktuální problematiku, jak teoreticky, tak experimentálně. To mimo jiné dokazuje skutečnost, že obdobný vztah k tomu, který byl v práci odvozen, byl nedávno publikován. Experimentálně se zatím nepodařilo prokázat, který z nich odpovídá lépe skutečnosti, i když jsme se o to pokoušeli, jak měřením úbytku napětí na povrchu vodiče, tak z průběhu vnějšího magnetického pole.

Další pokračování v této zajímavé a prakticky důležité oblasti výzkumu by se mělo soustředit zejména na tyto problémy

- Dosažení silnějšího buzení vodičů při vysoké frekvenci. Pravděpodobně bude nutno navrhnout a realizovat vhodnější transformátor. Pak bude mj. možné experimentálně ověřit vztahy popisující skinefekt.
- Kriticky posoudit možnost měření úbytku napětí na povrchu vodič při malé vzdálenosti sond.
- Aplikovat systém COMSOL Multiphysics k teoretickému výpočtu vlivu vířivých proudů. To mimo jiné umožní posoudit jejich vliv na vnější magnetické pole.
- Teoretické i experimentální studium oteplování povrchu vodičů.

Vlastní publikace

- [1] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: Skin effect in massive conductors at technical frequencies. *Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review)*, Vol. 87, No 5, 2011, pp. 179-185.
- [2] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: Detailed and complete description of skin effect. *Slaboproudý obzor*, vol. 64, 2008, pp. 25-28, ISSN 0037-668X (in Czech).
- [3] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: Skin-effect – complex solution. *STO - 10 - Modern ways teaching of electrical engineering and electronics*, Brno, 2008, pp. 87-90, ISBN: 978-80-7231-554-3 (in Czech).
- [4] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: Surface phenomena in AC low voltage bus bars. *EPVE - Electrical Drives of Power Electronics*, Brno, 2008, pp. 17, ISBN 978-80-7204-603-4.
- [5] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: The Skin Effect within Three Phase 50 Hz Power Net with High Current Load. *ECMS - 9th International Workshop on Electronics, Control, Modeling, Measurement and Signals*, Mondragon, Spain, 2009, pp. 197- 202, ISBN 978-84-608-0941-8.
- [6] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: Technical calculation, modeling and visualization of 3D magnetic field. *TCP - Technical computing Prague*, Praha, 2009, pp. 105, ISBN 978-80-7080-733-0.
- [7] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: Fast numeric calculation of massive conductor 3D magnetic field. *AMTEE - Advanced methods in the theory of electrical engineering*, Plzeň, 2009, pp. I17-I18, ISBN 978-80-7042-821-3.
- [8] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: Magnetic field of massive conductor at low frequency, *CPEE - Computational problems of electrical engineering*, Plzeň, 2010, pp. 12, ISBN 978-80-7043-899-2.
- [9] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: Electromagnetic shielding with the textile structures. *TEXSCI - 7th International Textile Science*, Liberec, 2010, pp. 5, ISBN 978-80-7372-635-5.
- [10] Truhlar, M. – Kosek, M. – Richter, A.: Experimental and Theoretical Study of Effect in Power Distribution Net. *Measurement 2011 - Proceedings of the 8th International Conference on Measurement*, Bratislava, Slovakia, 2011, pp. 170-173, ISBN 978-80-969-672-4-7.
- [11] Truhlar, M. - Kosek, M - Richter, A.: Microwave Properties of Plane Textiles with Varying Contents of Metal Fibers. In *13th International Symposium on Microwave and Optical Technology - ISMOT 2011*. Praha, 2011.

Literatura

- [1] Haňka, L.: Teorie elektromagnetického pole, SNTL, Praha, 1975.
- [2] Sedlák, B., Štoll, I: Elektřina a magnetismus, 1. edice, Academia a Karolinum, 1993. ISBN 80-200-0172-7.
- [3] Inan U, S, Inan A, S.: Engineering electromagnetics, published in Menlo Park, California, Addison-Wesley, Inc.
- [4] Maxwell, J. C.: A treatise on electricity & magnetism, Vol. 1. 3rd edition, 1954. Dover Publications Inc., New York. ISBN 0-486-60636-8.
- [5] Maxwell, J., C.: A treatise on electricity & magnetism, Vol. 2. 3rd edition, 1954. Dover Publications Inc., New York. ISBN 0-486-60637-8.
- [6] Dwight, H., B.: Electrical Coils and Conductors, The Maple Press Company, New York, 1948.
- [7] Langer, M.: Teorie indukčního a dielektrického tepla, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1964.
- [8] Mayer, D. - Ulrych, B.: Povrchový jev ve vodiči protékaném časově harmonickým proudem, Elektrotechnický časopis, 1988, roč. 39, č. 7, s. 498-509, ISSN 0037-668X.
- [9] Gerling, D.: Approximate analytical calculation of the skin effect in rectangular wires, Electrical Machines and Systems, 2009. ICEMS 2009. International Conference on, pp.1-6, 15-18 Nov. 2009.
- [10] Gerling, D.: Analysis of the magnetomotive force of a three-phase winding with concentrated coils and different symmetry features, Electrical Machines and Systems, 2008. ICEMS 2008, pp.2832-2837, 17-20 Oct. 2008.
- [11] Jafari-Shapoorabadi, R.- Konrad, A. - Sinclair, A.: Comparison of Three Formulations for Eddy-Current and Skin Effect Problems, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 38, No. 2, March 2002.
- [12] Imamura, M.- Nakahara, M.- Yamaguchi, T. - Tamura S.: Analysis of Magnetic Fields Due to Three-Phase Bus Bar Currents for the Design of an Optical Current Transformer, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 34, No. 4, July 1998.
- [13] Imamura, M. - Tokubuchi, M.: Magnetic Field Analysis for the Used for Three-phase Bus-Bars Arranged Longitudinally Optical Current-Transformer, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 32, No. 5, September 1996.
- [14] Fawzi, T.H. - Burke, P. E. - Lau, T.C.H.: Bie Analysis of Eddy Current Losses in Rectangular Busbars in Nonuniform Field, IEEE Transactions on Magnetics, Vol Mag-18, No. 6, November 1982.

- [15] Pfotenhauer, J.M.; Blanchard, J.P.; Martin, C.J.: Eddy current heating in micro-SMES bus-bars, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, vol.15, no.2, pp. 1939 - 1942, June 2005.
- [16] R. M. Del Vecchio: Eddy current losses in a Conducting Plate Due to a Collection of Bus Bars Carrying Currents of Different Magnitudes and Phases, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 39, No. 1, January 2003.
- [17] Jain, M. P.- Ray, L. M.: Field Pattern and Associated Losses in Aluminum Sheet in Presence of Strip Bus Bars, IEEE Transaction On Power Apparatus and Systems, Vol. Pas-89, No. 7, September/October 1970.
- [18] Y. Yanyou, Y. - Renyuan T. - Yan L.: Eddy Current Fields and Overheating Problem due to Heavy Current Carrying Conductors, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.30, No. 5, September 1994.
- [19] Brauer, J.; Finite element calculation of eddy currents and skin effects, IEEE Transactions on Magnetics , vol.18, no.2, pp. 504- 509, Mar 1982.
- [20] Piatek, Z.- Kusiak, D. - Szczgielniak, T. : The magnetic field of screened flat three-phase high current busduct, AMTEE'09 - Advanced methods in the theory of electrical engineering, Plzeň, 2009, ISBN 978-80-7042-821-3.
- [21] Mikolanda, T., Kosek, M., Richter, A.: Modeling and Measurement of Permanent Magnets, Acta Technica, (Institute of Thermomechanics AS CR), Vol. 55, No. 1, pp. 63-81, 2010. ISSN 0001-7043
- [22] Mikolanda, T.: Studium silového působení mezi permanentními magnety. Dizertační práce. Technická univerzita v Liberci. Liberec. 2009.
- [23] Frolo, J., Andris, P., Přibil, J., Vojtíšek, L., Holúbeková, Z., Dremek, T.: Magnetic Field Measurement of a Planar coil using Magnetic resonance Imaging Methods, published in MEASUREMENT 2009, Proceeding of the 7th International Conference on Measurement, Smolenice, Slovakia, May 20 - 23, 2009, pp. 258-261, ISBN 978-80-969672-1-6.
- [24] Truhlar, M. – Kosek, M. – Richter, A.: Experimental and Theoretical Study of Effect in Power Distribution Net. Measurement 2011 - Proceedings of the 8th International Conference on Measurement, Bratislava, Slovakia, 2011, pp. 170-173, ISBN 978-80-969672-4-7.
- [25] Jevy ovlivňující útlum symetrických kabelových vedení [online]. 2004 [cit. 2011-06-20]. Access.feld.cvut.cz. Dostupné z WWW: <http://access.feld.cvut.cz/view.php?cisloclanku=2004120201>. ISSN 1214-9675.
- [26] Novák, M.: Technical report, unpublished.